1

解答解説のページへ

原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(c,\ d)$ が与えられていて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ とする。また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ とする。次の問いに答えよ。

(1) k を c, d を用いて表せ。

(2) 点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を動くとき，点 Q はある円 C 上を動く。円 C の方程式を求めよ。

(3) (2)において，点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を $(0,\ 6)$ から $(3,\ 0)$ まで動くとき，円 C 上で点 Q の動く範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

放物線 $C: y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(-b < a < 0 < b)$ をとる。点 A, B における放物線 C の接線をそれぞれ l, m とし, l と m の交点を P とする。また, 直線 AB と x 軸のなす角を α, 接線 m と x 軸のなす角を β とする。ただし, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と接線 m の方程式を a, b を用いて表せ。

(2) $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$ のとき, a を b を用いて表せ。

(3) $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\angle\mathrm{BAP} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, a, b の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

k は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$，$\mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$ をとり，四面体 OABC を考える。次の問いに答えよ。

(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $k,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3)　P と Q は(2)の内分点とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるとき，P と Q の座標を求めよ。

4

解答解説のページへ

a は実数とする。$y=x^3-2x^2+x$ が定める曲線 C と $y=ax$ が定める直線 l を考える。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるとき，それらの x 座標を 0，α，β として，$0<\alpha<\beta$ が成り立っているとする。$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

1　　問題のページへ

(1)　原点 O と異なる $\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(c,\ d)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ より，

$$(c,\ d)=k(a,\ b),\ (a,\ b)=\frac{1}{k}(c,\ d)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ から，$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=4\cdots\cdots\cdots②$

①②から，$k>0$ なので $\frac{1}{k}(\sqrt{c^2+d^2})^2=4$ となり，$k=\frac{c^2+d^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$

(2)　①③から，$(a,\ b)=\frac{4}{c^2+d^2}(c,\ d)\cdots\cdots\cdots④$

さて，点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を動くとき，$2a+b-6=0\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$\frac{8c}{c^2+d^2}+\frac{4d}{c^2+d^2}-6=0$ となり，$4c+2d-3(c^2+d^2)=0$

$$c^2+d^2-\frac{4}{3}c-\frac{2}{3}d=0,\ \left(c-\frac{2}{3}\right)^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

これより，点 Q の動く円 C の方程式は $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ となる。

(3)　点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を $(0,\ 6)$ から $(3,\ 0)$ まで動くとき，

$$2a+b-6=0,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0$$

すると，点 Q に対し，$c^2+d^2-\frac{4}{3}c-\frac{2}{3}d=0$，$\frac{4c}{c^2+d^2}\geqq 0$，$\frac{4d}{c^2+d^2}\geqq 0$ となり，

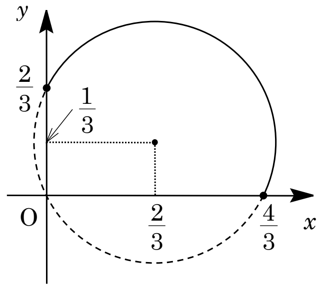
$$\left(c-\frac{2}{3}\right)^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9},\ c\geqq 0,\ d\geqq 0,\ (c,\ d)\neq(0,\ 0)$$

よって，点 Q の動く範囲は，

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

これを図示すると，右図の実線部の円弧となる。ただし，端点の黒丸は含む。

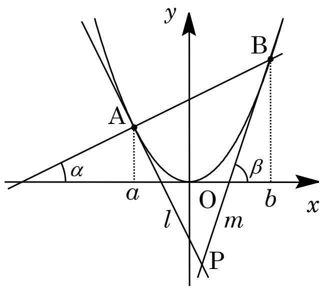


［解　説］

軌跡についての有名問題です。しかも，丁寧な誘導がついています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$-b<a<0<b$ として，$C: y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ に対し，直線 AB の傾きは $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ より，その方程式は，

$$y-a^2=(a+b)(x-a),\quad y=(a+b)x-ab$$

また，点 A, B における C の接線をそれぞれ l，m とすると，$y=x^2$ から $y'=2x$ となり，m の方程式は，

$$y-b^2=2b(x-b),\quad y=2bx-b^2$$

(2)　直線 AB，接線 m と x 軸のなす角をそれぞれ α，β とすると，

$$\tan\alpha=a+b,\ \tan\beta=2b\ \ \left(ただし，0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

ここで，$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan\beta=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha\cdot 1}$ となり，

$$2b=\frac{a+b+1}{1-(a+b)},\ 2b(1-a-b)=a+b+1,\ (2b+1)a=-2b^2+b-1$$

$2b+1>0$ より，$a=-\dfrac{2b^2-b+1}{2b+1}$ ………①

(3)　l と m の交点 P に対して $\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\pi}{2}$ から，l の傾き $2a$ に注意して，

$$2a(a+b)=-1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$-2\cdot\dfrac{2b^2-b+1}{2b+1}\left(-\dfrac{2b^2-b+1}{2b+1}+b\right)=-1$ となり，

$$2(2b^2-b+1)(2b-1)=(2b+1)^2,\ 8b^3-12b^2+2b-3=0$$

すると，$(2b-3)(4b^2+1)=0$ となり，$b=\dfrac{3}{2}$ である。

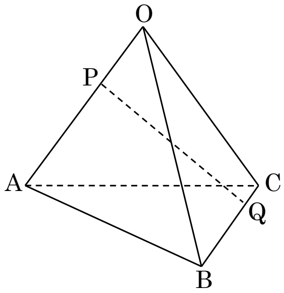
①から，$a=-\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}+1}{3+1}=-1$ となり，この値は $-b<a<0<b$ を満たしている。

［解　説］

直線の傾きを題材とした基本題です。ただ，(3)の計算はやや煩雑です。

3

問題のページへ



(1) 原点 O, 点 $A(1,\ 1,\ -1)$, $B(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$, $C(4k+4,\ -2k,\ -k)$に対し,

$$\overrightarrow{OA}=(1,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{BC}=(4,\ -2,\ -1)$$

ここで, 単位ベクトル$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと,

$$a^2+b^2+c^2=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より,

$$a+b-c=0\ \cdots\cdots\cdots②,\ 4a-2b-c=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $3a-3b=0$ から $b=a$ となり, $c=a+a=2a$

①に代入し, $a^2+a^2+4a^2=1$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となるので, $\vec{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ 2)$

(2) $OP:PA=s:(1-s)$ より, $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=(s,\ s,\ -s)$

$BQ:QC=t:(1-t)$ より, $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(4k+4t,\ -2k-2t+2,\ -k-t+1)$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(4k+4t-s,\ -2k-2t-s+2,\ -k-t+s+1)$$

(3) 条件より, l を実数として $\overrightarrow{PQ}=l\vec{n}$ と表せるので, $l'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}l$ とおくと,

$$4k+4t-s=l'\ \cdots\cdots④,\ -2k-2t-s+2=l'\ \cdots\cdots⑤,\ -k-t+s+1=2l'\ \cdots\cdots⑥$$

④⑤より, $6k+6t-2=0$ となり, $k+t=\dfrac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑦$

⑤⑥より, $-3k-3t-3s+3=0$ となり, ⑦から $-1-3s+3=0$, すなわち $s=\dfrac{2}{3}$

よって, $P\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$, $Q\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$である。

［解 説］

空間ベクトルの基本題です。誘導に沿えば, 計算ミスに注意するだけです。

4

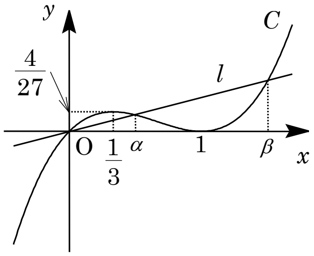
問題のページへ

(1)　曲線$C: y = x^3 - 2x^2 + x$ ……①に対して,

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$$

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，yの増減は右表のようになり，曲線 C の概形は右下図の通りである。



さて，①と$l: y = ax$ ……②を連立して，

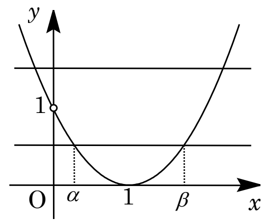
$$x^3 - 2x^2 + x = ax,\ x(x^2 - 2x + 1 - a) = 0$$

すると，$x = 0$，$x^2 - 2x + 1 - a = 0$ ………③

ここで，C と l が異なる 3 点で交わる条件は，③が$x \neq 0$の異なる 2 実数解をもつことであり，

$$x^2 - 2x + 1 = a,\ (x-1)^2 = a$$

さらに，$y = (x-1)^2$ と $y = a$ のグラフを考えると，2 つのグラフが$x \neq 0$の 2 個の共有点をもつことに対応するので，右図から，



$$0 < a < 1,\ 1 < a$$

(2)　C と l の 3 個の交点が$x = 0,\ \alpha,\ \beta\ (0 < \alpha < \beta)$であるとき，(1)から$0 < a < 1$である。このとき，$\alpha = 1 - \sqrt{a}$，$\beta = 1 + \sqrt{a}$から，

$$\alpha + \beta = 2,\ \beta - \alpha = 2\sqrt{a},\ \alpha\beta = 1 - a$$

さて，$\alpha \leqq x \leqq \beta$の範囲で$C$と$l$で囲まれた部分の面積$S$は，

$$S = \int_\alpha^\beta \{ax - (x^3 - 2x^2 + x)\}dx = -\int_\alpha^\beta \{x^3 - 2x^2 + (1-a)x\}dx$$

$$= -\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2\Big]_\alpha^\beta = -\frac{\beta^4 - \alpha^4}{4} + \frac{2}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1-a}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$

ここで，$\beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 2\sqrt{a} \cdot 2 = 4\sqrt{a}$

$$\beta^3 - \alpha^3 = (\beta - \alpha)^3 + 3\alpha\beta(\beta - \alpha) = 8a\sqrt{a} + 3(1-a)\cdot 2\sqrt{a} = (2a+6)\sqrt{a}$$

$$\beta^4 - \alpha^4 = (\beta^2 - \alpha^2)\{(\beta + \alpha)^2 - 2\alpha\beta\} = 4\sqrt{a}(4 - 2 + 2a) = (8a+8)\sqrt{a}$$

これらの値を代入すると，

$$S = -\frac{8a+8}{4}\sqrt{a} + \frac{2}{3}(2a+6)\sqrt{a} - \frac{1-a}{2}\cdot 4\sqrt{a}$$

$$= -(2a+2)\sqrt{a} + \Big(\frac{4}{3}a + 4\Big)\sqrt{a} - (2-2a)\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

［解　説］

定積分と面積についての問題です。計算量も妥当なものです。