

1

解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの x の関数 $y = 2x^2 - 3x + 1 + (x - 2)|x - 1|$ と $y = ax - a$ のグラフで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = 2x^2 - 3x + 1 + (x - 2)|x - 1|$ のグラフをかけ。
- (2) $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (3) a がすべての正の実数を動くとき、 $S(a)$ の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える。

$$5p^2 + 2p = q^2 + 5q, \quad q = ap, \quad pq \neq 0$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a = 2$ のとき, p と q を求めよ。
- (2) $a \neq \pm\sqrt{5}$ のとき, p と q をそれぞれ a を用いて表せ。
- (3) a は有理数で, $a = \frac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする。ただし, k は自然数, m は整数とする。
 - (i) $5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数ならば, p と q はともに整数であることを証明せよ。
 - (ii) 逆に, p と q がともに整数ならば, $5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

1 枚のカードに数が 1 つ書かれた数枚のカードからなる 1 セットをよくかき混ぜ、上下に重ねて束にする。この束から、A と B の 2 人が A から始めて交互に、カードを上から順に 1 枚ずつ取り出し、次の原則にしたがって A と B がカードを保有するものとする。

[原則] カードを取り出した人がそのカードを保有する。

(ケース 1) 1, 2, 3, 4, 5 の数がそれぞれ 1 つずつ書かれた 5 枚のカードからなる 1 セットを用いて、原則にしたがってカードがなくなるまでカードを取り出し、保有する。

(ケース 2) 0, 1, 2, 3, 4, 5 の数がそれぞれ 1 つずつ書かれた 6 枚のカードからなる 1 セットを用いる。そして数 0 が書かれたカードが取り出されるまでは原則にしたがってカードを保有し、数 0 が書かれたカードが取り出されて保有されたとき、A と B はその時点で保有しているカードをすべて交換し、その後も原則にしたがってカードがなくなるまでカードを取り出し、保有する。

ケース 1 とケース 2 において、カードをすべて取り出したときに A と B がそれぞれ保有しているカードに書かれた数の合計をそれぞれの合計点、最大の数それぞれの最高点と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

- (1) ケース 1 で A の最高点が 5 である確率を求めよ。
- (2) ケース 1 で A の合計点が B の合計点より大きくなる確率を求めよ。
- (3) ケース 2 で A の最高点が 5 である確率を求めよ。
- (4) ケース 2 で A の合計点が B の合計点より大きくなる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ を満たす実数 θ に対して、 xyz 空間内の点 P と Q を

$$P\left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}\right), Q\left(2\cos\theta + \sin\theta, 2\sin\theta - \cos\theta, \frac{3}{2}\right)$$

と定め、条件(A)「直線 PQ と zx 平面が 1 つの点だけで交わる」を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 条件(A)が成り立つような θ の範囲を求めよ。
- (2) 条件(A)が成り立つものとし、この交点を $R(p, 0, q)$ とする。
 - (i) p と q をそれぞれ θ の式で表せ。
 - (ii) $p^2 - 2q^2$ は θ によらない定数であることを示せ。

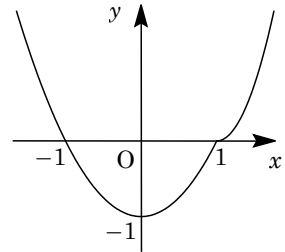
1

問題のページへ

(1) $y = 2x^2 - 3x + 1 + (x-2)|x-1| \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して,

- $x \geq 1$ のとき $y = (2x-1)(x-1) + (x-2)(x-1)$
 $= (x-1)(2x-1+x-2) = 3(x-1)^2$
- $x < 1$ のとき $y = (2x-1)(x-1) - (x-2)(x-1)$
 $= (x-1)(2x-1-x+2) = x^2 - 1$

これより、関数①のグラフは右図のようになる。



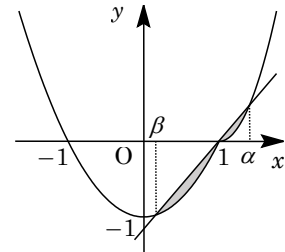
(2) ①と $y = ax - a = a(x-1)$ ($a > 0$) $\cdots \cdots \textcircled{2}$ の共有点は,

- $x \geq 1$ のとき $3(x-1)^2 = a(x-1)$ より、 $(x-1)(3x-3-a) = 0$
 $\alpha = \frac{a+3}{3}$ とおくと $a > 1$ となるので、 $x = 1, \alpha$ である。
- $x < 1$ のとき $x^2 - 1 = a(x-1)$ より、 $(x-1)(x+1-a) = 0$
 $\beta = a-1$ とおくと $a < 2$ のとき $\beta < 1$ となるので、このときのみ $x = \beta$ である。

すると、関数①と②のグラフに囲まれた部分の面積を $S(a)$ は、

(i) $0 < a < 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\beta}^1 \{a(x-1) - (x^2 - 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^{\alpha} \{a(x-1) - 3(x-1)^2\} dx \\ &= -\int_{\beta}^1 (x-1)(x-\beta) dx - 3 \int_1^{\alpha} (x-1)(x-\alpha) dx \\ &= \frac{1}{6}(1-\beta)^3 + 3 \cdot \frac{1}{6}(\alpha-1)^3 = \frac{1}{6}\{1-(a-1)\}^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+3}{3}-1\right)^3 \\ &= \frac{1}{6}(8-12a+6a^2-a^3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{27} = -\frac{4}{27}a^3 + a^2 - 2a + \frac{4}{3} \end{aligned}$$



(ii) $a \geq 2$ のとき

$$S(a) = \int_1^a \{a(x-1) - 3(x-1)^2\} dx = -3 \int_1^a (x-1)(x-\alpha) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{27} = \frac{a^3}{54}$$

(3) $0 < a < 2$ のとき、 $S'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + 2a - 2 = -\frac{2}{9}(a-3)(2a-3)$

また、 $a \geq 2$ のとき、 $S'(a) = \frac{a^2}{18} > 0$ になるので、 $a > 0$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。これより、 $S(a)$ の最小値は、 $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{12}$ である。

a	0	...	$\frac{3}{2}$...	2	...
$S'(a)$		-	0	+		+
$S(a)$	$\frac{4}{3}$	\searrow	$\frac{1}{12}$	\nearrow	$\frac{4}{27}$	\nearrow

[解説]

放物線と直線に囲まれた面積を求めるという基本的な問題です。ただ、計算量は多めです。

2

問題のページへ

(1) $pq \neq 0$ で、 $5p^2 + 2p = q^2 + 5q \cdots \cdots \textcircled{1}$ 、 $q = ap \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対し、 $a = 2$ のとき、 $\textcircled{2}$ は $q = 2p$ となり、 $\textcircled{1}$ に代入すると $5p^2 + 2p = 4p^2 + 10p$ から、 $p^2 = 8p$
 $p \neq 0$ より $p = 8$ となり、 $q = 2 \cdot 8 = 16$ である。

(2) $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、 $5p^2 + 2p = a^2 p^2 + 5ap$ から、 $(5 - a^2)p^2 = (5a - 2)p$
 $p \neq 0$ 、 $a \neq \pm\sqrt{5}$ より $p = \frac{5a - 2}{5 - a^2} \cdots \cdots \textcircled{3}$ となり、 $q = \frac{a(5a - 2)}{5 - a^2} \cdots \cdots \textcircled{4}$ である。

(3) k は自然数、 m は整数で、互いに素であるとき、 $a = \frac{m}{k}$ とすると、 $\textcircled{3}\textcircled{4}$ から、

$$p = \frac{5 \cdot \frac{m}{k} - 2}{5 - \frac{m^2}{k^2}} = \frac{k(5m - 2k)}{5k^2 - m^2} \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad q = \frac{m}{k} \cdot \frac{5 \cdot \frac{m}{k} - 2}{5 - \frac{m^2}{k^2}} = \frac{m(5m - 2k)}{5k^2 - m^2} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

(i) $5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数のとき、 l を整数として、 $5m - 2k = l(5k^2 - m^2)$

$$\textcircled{5} \text{ より } p = \frac{kl(5k^2 - m^2)}{5k^2 - m^2} = kl, \quad \textcircled{6} \text{ より } q = \frac{ml(5k^2 - m^2)}{5k^2 - m^2} = ml$$

これより、 p と q はともに整数である。

(ii) p, q が 0 でない整数のとき、 $\textcircled{2}$ から $q = \frac{m}{k}p$ となり、 $mp = kq \cdots \cdots \textcircled{7}$

さて、 k と m は互いに素なので、 $\textcircled{7}$ から p は k の倍数となることより、 i を整数として $p = ki$ と表せ、また $\textcircled{5}$ から $k(5m - 2k) = p(5k^2 - m^2)$ となるので、

$$k(5m - 2k) = ki(5k^2 - m^2), \quad 5m - 2k = i(5k^2 - m^2) \cdots \cdots \textcircled{8}$$

同様に、 $\textcircled{7}$ から q は m の倍数となるので、 j を整数として $q = mj$ と表せ、また $\textcircled{6}$ から $m(5m - 2k) = q(5k^2 - m^2)$ となるので、

$$m(5m - 2k) = mj(5k^2 - m^2), \quad 5m - 2k = j(5k^2 - m^2) \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8}\textcircled{9}$ より、 p と q がともに整数ならば、 $5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数である。

[解説]

整数が題材の論証問題です。(3)(ii)の解答例は、やや冗長な感じもしますが。

3

問題のページへ

- (1) ケース 1 のとき、束にしたカードについて、上から数えたカードとそれを保有する人の関係は、右表のようになる。

1 枚目	A
2 枚目	B
3 枚目	A
4 枚目	B
5 枚目	A

すると、A の最高点が 5 であるのは、数 5 のカードが上から 1 枚目、3 枚目、5 枚目のいずれかの場合である。

数 5 のカードが上から 1 枚目の場合の確率は $\frac{1 \times 4!}{5!} = \frac{1}{5}$ である。

数 5 のカードが上から 3 枚目、5 枚目の場合も同様なので、A の最高点が 5 である確率は、 $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$ となる。

- (2) ケース 1 のとき、 $1+2+3+4+5=15$ なので、A の合計点が B の合計点より大きくなるのは、

- (i) A の合計点 8 で B の合計点 7 のとき

・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 1, 数 2, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 3, 数 4} の場合
 ・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 1, 数 3, 数 4}, 2 枚目、4 枚目が {数 2, 数 5} の場合
 このときの確率は、 $\frac{3! \times 2!}{5!} \times 2 = \frac{1}{5}$ となる。

- (ii) A の合計点 9 で B の合計点 6 のとき

・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 1, 数 3, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 2, 数 4} の場合
 ・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 2, 数 3, 数 4}, 2 枚目、4 枚目が {数 1, 数 5} の場合
 このときの確率は、 $\frac{3! \times 2!}{5!} \times 2 = \frac{1}{5}$ となる。

- (iii) A の合計点 10 で B の合計点 5 のとき

・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 1, 数 4, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 2, 数 3} の場合
 ・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 2, 数 3, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 1, 数 4} の場合
 このときの確率は、 $\frac{3! \times 2!}{5!} \times 2 = \frac{1}{5}$ となる。

- (iv) A の合計点 11 で B の合計点 4 のとき

・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 2, 数 4, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 1, 数 3} の場合
 このときの確率は、 $\frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{1}{10}$ となる。

- (v) A の合計点 12 で B の合計点 3 のとき

・ 1 枚目、3 枚目、5 枚目が {数 3, 数 4, 数 5}, 2 枚目、4 枚目が {数 1, 数 2} の場合
 このときの確率は、 $\frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{1}{10}$ となる。

- (i)~(v)より、A の合計点が B の合計点より大きくなる確率は、

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

- (3) ケース 2 のとき、束にしたカードについて、上から数えたカードとそれを保有する人の関係は、数 0 のカードの位置で場合分けをすると右表のようになる。すると、A の最高点が 5 であるのは、数 5 のカードの位置が次のときである。

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)
1 枚目	数 0	B	B	B	B	B
2 枚目	B	数 0	A	A	A	A
3 枚目	A	A	数 0	B	B	B
4 枚目	B	B	B	数 0	A	A
5 枚目	A	A	A	A	数 0	B
6 枚目	B	B	B	B	B	数 0

(I), (II) のときは上から 3 枚目または 5 枚目, (III), (IV) のときは上から 2 枚目または 5 枚目, (V), (VI) のときは上から 2 枚目または 4 枚目となり, その確率は,

$$\left(\frac{1 \times 1 \times 4!}{6!} \times 2\right) \times 6 = \frac{1}{15} \times 6 = \frac{2}{5}$$

- (4) ケース 2 のとき, (I)~(VI) のいずれの場合も, 数 0 以外のカードを, A は 2 枚, B は 3 枚保有することに注意すると, $0+1+2+3+4+5=15$ から, A の合計点が B の合計点より大きくなるのは,

- (i) A の合計点 8 で B の合計点 7 のとき

A が {数 3, 数 5}, B が {数 1, 数 2, 数 4} を保有する場合となり, このときの確率は,

$$\frac{1 \times 2! \times 3!}{6!} \times 6 = \frac{1}{60} \times 6 = \frac{1}{10}$$

- (ii) A の合計点 9 で B の合計点 6 のとき

A が {数 4, 数 5}, B が {数 1, 数 2, 数 3} を保有する場合となり, このときの確率は,

$$\frac{1 \times 2! \times 3!}{6!} \times 6 = \frac{1}{60} \times 6 = \frac{1}{10}$$

- (i)(ii) より, A の合計点が B の合計点より大きくなる確率は,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

[解説]

読解力と慎重さの要求される確率問題です。後半の(3)(4)については、解答例の表を見ながら処理をしています。なお、(4)の場合分けを考えれば、(2)は余事象を利用した方がよかったです。

4

問題のページへ

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、 $P\left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(2\cos \theta + \sin \theta, 2\sin \theta - \cos \theta, \frac{3}{2}\right)$ に

対して、 $\overrightarrow{PQ} = (\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta - \cos \theta, 1)$ となる。

t を実数として、直線 PQ をパラメータ表示すると、

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2}\right) + t(\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta - \cos \theta, 1) \\ &= \left(\cos \theta + t(\cos \theta + \sin \theta), \sin \theta + t(\sin \theta - \cos \theta), \frac{1}{2} + t\right) \end{aligned}$$

zx 平面 ($y = 0$) との交点は、 $\sin \theta + t(\sin \theta - \cos \theta) = 0 \cdots \cdots (*)$ から、

(a) $\sin \theta - \cos \theta = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$) のとき (*) は成立しない。

(b) $\sin \theta - \cos \theta \neq 0$ ($\theta \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$) のとき (*) は $t = -\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ で成立する。

(a)(b) より、直線 PQ と zx 平面が 1 つの点だけで交わる θ の範囲は、

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi < \theta \leq 2\pi$$

(2) (i) 直線 PQ と zx 平面の交点を $R(p, 0, q)$ とすると、(1) から、

$$\begin{aligned} p &= \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta}(\cos \theta + \sin \theta) \\ &= \frac{\cos \theta(\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta(\cos \theta + \sin \theta)}{\sin \theta - \cos \theta} = -\frac{1}{\sin \theta - \cos \theta} \end{aligned}$$

$$q = \frac{1}{2} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = -\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2(\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad p^2 - 2q^2 &= \frac{1}{(\sin \theta - \cos \theta)^2} - 2 \cdot \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{4(\sin \theta - \cos \theta)^2} = \frac{2 - (\sin \theta + \cos \theta)^2}{2(\sin \theta - \cos \theta)^2} \\ &= \frac{2 - (1 + 2\sin \theta \cos \theta)^2}{2(1 - 2\sin \theta \cos \theta)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[解説]

空間図形についての基本題です。複雑な計算もありません。