1

解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの x の関数 $y=2x^2-3x+1+(x-2)|x-1|$ と $y=ax-a$ のグラフで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=2x^2-3x+1+(x-2)|x-1|$ のグラフをかけ。

(2)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての正の実数を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える。

$$5p^2+2p=q^2+5q\,,\ \ q=ap\,,\ \ pq\neq 0$$

次の問いに答えよ。

(1)　$a=2$ のとき, p と q を求めよ。

(2)　$a\neq\pm\sqrt{5}$ のとき, p と q をそれぞれ a を用いて表せ。

(3)　a は有理数で, $a=\dfrac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする。ただし, k は自然数, m は整数とする。

(i)　$5m-2k$ が $5k^2-m^2$ の倍数ならば, p と q はともに整数であることを証明せよ。

(ii)　逆に, p と q がともに整数ならば, $5m-2k$ は $5k^2-m^2$ の倍数であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

1 枚のカードに数が 1 つ書かれた数枚のカードからなる 1 セットをよくかき混ぜ, 上下に重ねて束にする。この束から, A と B の 2 人が A から始めて交互に, カードを上から順に 1 枚ずつ取り出し, 次の原則にしたがって A と B がカードを保有するものとする。

[原則]　カードを取り出した人がそのカードを保有する。

(ケース 1)　1, 2, 3, 4, 5 の数がそれぞれ 1 つずつ書かれた 5 枚のカードからなる 1 セットを用いて, 原則にしたがってカードがなくなるまでカードを取り出し, 保有する。

(ケース 2)　0, 1, 2, 3, 4, 5 の数がそれぞれ 1 つずつ書かれた 6 枚のカードからなる 1 セットを用いる。そして数 0 が書かれたカードが取り出されるまでは原則にしたがってカードを保有し, 数 0 が書かれたカードが取り出されて保有されたとき, A と B はその時点で保有しているカードをすべて交換し, その後も原則にしたがってカードがなくなるまでカードを取り出し, 保有する。

ケース 1 とケース 2 において, カードをすべて取り出したときに A と B がそれぞれ保有しているカードに書かれた数の合計をそれぞれの合計点, 最大の数をそれぞれの最高点と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1)　ケース 1 で A の最高点が 5 である確率を求めよ。

(2)　ケース 1 で A の合計点が B の合計点より大きくなる確率を求めよ。

(3)　ケース 2 で A の最高点が 5 である確率を求めよ。

(4)　ケース 2 で A の合計点が B の合計点より大きくなる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を満たす実数 θ に対して，xyz 空間内の点 P と Q を

$$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(2\cos\theta+\sin\theta,\ 2\sin\theta-\cos\theta,\ \frac{3}{2}\right)$$

と定め，条件(A)「直線 PQ と zx 平面が 1 つの点だけで交わる」を考える。次の問いに答えよ。

(1)　条件(A)が成り立つような θ の範囲を求めよ。

(2)　条件(A)が成り立つものとし，この交点を $\mathrm{R}(p,\ 0,\ q)$ とする。

(i)　p と q をそれぞれ θ の式で表せ。

(ii)　p^2-2q^2 は θ によらない定数であることを示せ。

1

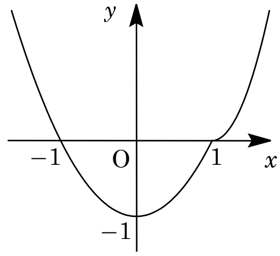
問題のページへ

(1)　$y=2x^2-3x+1+(x-2)|x-1|$ ……①に対して,

・$x\geqq 1$ のとき　$y=(2x-1)(x-1)+(x-2)(x-1)$
$$=(x-1)(2x-1+x-2)=3(x-1)^2$$

・$x<1$ のとき　$y=(2x-1)(x-1)-(x-2)(x-1)$
$$=(x-1)(2x-1-x+2)=x^2-1$$

これより，関数①のグラフは右図のようになる。



(2)　①と $y=ax-a=a(x-1)$ $(a>0)$ ……②の共有点は,

・$x\geqq 1$ のとき　$3(x-1)^2=a(x-1)$ より，$(x-1)(3x-3-a)=0$

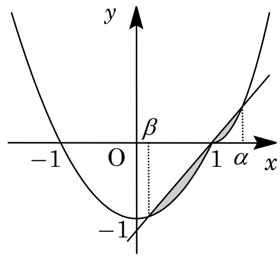
$\alpha=\dfrac{a+3}{3}$ とおくと $\alpha>1$ となるので，$x=1,\ \alpha$ である。

・$x<1$ のとき　$x^2-1=a(x-1)$ より，$(x-1)(x+1-a)=0$

$\beta=a-1$ とおくと $a<2$ のとき $\beta<1$ となるので，このときのみ $x=\beta$ である。

すると，関数①と②のグラフに囲まれた部分の面積を $S(a)$ は,

(i)　$0<a<2$ のとき



$$S(a)=\int_{\beta}^{1}\{a(x-1)-(x^2-1)\}dx+\int_{1}^{\alpha}\{a(x-1)-3(x-1)^2\}dx$$
$$=-\int_{\beta}^{1}(x-1)(x-\beta)dx-3\int_{1}^{\alpha}(x-1)(x-\alpha)dx$$
$$=\frac{1}{6}(1-\beta)^3+3\cdot\frac{1}{6}(\alpha-1)^3=\frac{1}{6}\{1-(a-1)\}^3+\frac{1}{2}\left(\frac{a+3}{3}-1\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}(8-12a+6a^2-a^3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{27}=-\frac{4}{27}a^3+a^2-2a+\frac{4}{3}$$

(ii)　$a\geqq 2$ のとき

$$S(a)=\int_{1}^{\alpha}\{a(x-1)-3(x-1)^2\}dx=-3\int_{1}^{\alpha}(x-1)(x-\alpha)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{27}=\frac{a^3}{54}$$

(3)　$0<a<2$ のとき，$S'(a)=-\dfrac{4}{9}a^2+2a-2=-\dfrac{2}{9}(a-3)(2a-3)$

また，$a\geqq 2$ のとき，$S'(a)=\dfrac{a^2}{18}>0$ なので，$a>0$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(a)$ の最小値は，$S\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{12}$ である。

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$S(a)$	$\frac{4}{3}$	↘	$\frac{1}{12}$	↗	$\frac{4}{27}$	↗

© 電送数学舎 2024

［解 説］

放物線と直線に囲まれた面積を求めるという基本的な問題です。ただ，計算量は多めです。

© 電送数学舎 2024

2

問題のページへ

(1)　$pq\neq 0$ で，$5p^2+2p=q^2+5q$ ……①，$q=ap$ ……②に対し，$a=2$ のとき，②は $q=2p$ となり，①に代入すると $5p^2+2p=4p^2+10p$ から，$p^2=8p$

$p\neq 0$ より $p=8$ となり，$q=2\cdot 8=16$ である。

(2)　②を①に代入すると，$5p^2+2p=a^2p^2+5ap$ から，$(5-a^2)p^2=(5a-2)p$

$p\neq 0$，$a\neq\pm\sqrt{5}$ より $p=\dfrac{5a-2}{5-a^2}$ ……③となり，$q=\dfrac{a(5a-2)}{5-a^2}$ ……④である。

(3)　k は自然数，m は整数で，互いに素であるとき，$a=\dfrac{m}{k}$ とすると，③④から，

$$p=\frac{5\cdot\dfrac{m}{k}-2}{5-\dfrac{m^2}{k^2}}=\frac{k(5m-2k)}{5k^2-m^2}\ \cdots\cdots⑤,\quad q=\frac{m}{k}\cdot\frac{5\cdot\dfrac{m}{k}-2}{5-\dfrac{m^2}{k^2}}=\frac{m(5m-2k)}{5k^2-m^2}\ \cdots\cdots⑥$$

(i)　$5m-2k$ が $5k^2-m^2$ の倍数のとき，l を整数として，$5m-2k=l(5k^2-m^2)$

⑤より $p=\dfrac{kl(5k^2-m^2)}{5k^2-m^2}=kl$，⑥より $p=\dfrac{ml(5k^2-m^2)}{5k^2-m^2}=ml$

これより，p と q はともに整数である。

(ii)　p, q が 0 でない整数のとき，②から $q=\dfrac{m}{k}p$ となり，$mp=kq$ ………⑦

さて，k と m は互いに素なので，⑦から p は k の倍数となることより，i を整数として $p=ki$ と表せ，また⑤から $k(5m-2k)=p(5k^2-m^2)$ となるので，

$$k(5m-2k)=ki(5k^2-m^2),\quad 5m-2k=i(5k^2-m^2)\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

同様に，⑦から q は m の倍数となるので，j を整数として $q=mj$ と表せ，また⑥から $m(5m-2k)=q(5k^2-m^2)$ となるので，

$$m(5m-2k)=mj(5k^2-m^2),\quad 5m-2k=j(5k^2-m^2)\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧⑨より，p と q がともに整数ならば，$5m-2k$ は $5k^2-m^2$ の倍数である。

［解　説］

整数が題材の論証問題です。(3)(ii)の解答例は，やや冗長な感じもしますが。

© 電送数学舎 2024

3

問題のページへ

(1)　ケース 1 のとき，束にしたカードについて，上から数えたカードとそれを保有する人の関係は，右表のようになる。

1 枚目	A
2 枚目	B
3 枚目	A
4 枚目	B
5 枚目	A

すると，A の最高点が 5 であるのは，数 5 のカードが上から 1 枚目, 3 枚目, 5 枚目のいずれかの場合である。

数 5 のカードが上から 1 枚目の場合の確率は $\dfrac{1\times 4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$ である。

数 5 のカードが上から 3 枚目，5 枚目の場合も同様なので，A の最高点が 5 である確率は，$\dfrac{1}{5}\times 3=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2)　ケース 1 のとき，$1+2+3+4+5=15$ なので，A の合計点が B の合計点より大きくなるのは，

(i)　A の合計点 8 で B の合計点 7 のとき

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 1，数 2，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 3，数 4}の場合

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 1，数 3，数 4}，2 枚目, 4 枚目が{数 2，数 5}の場合

このときの確率は，$\dfrac{3!\times 2!}{5!}\times 2=\dfrac{1}{5}$ となる。

(ii)　A の合計点 9 で B の合計点 6 のとき

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 1，数 3，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 2，数 4}の場合

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 2，数 3，数 4}，2 枚目, 4 枚目が{数 1，数 5}の場合

このときの確率は，$\dfrac{3!\times 2!}{5!}\times 2=\dfrac{1}{5}$ となる。

(iii) A の合計点 10 で B の合計点 5 のとき

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 1，数 4，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 2，数 3}の場合

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 2，数 3，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 1，数 4}の場合

このときの確率は，$\dfrac{3!\times 2!}{5!}\times 2=\dfrac{1}{5}$ となる。

(iv) A の合計点 11 で B の合計点 4 のとき

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 2，数 4，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 1，数 3}の場合

このときの確率は，$\dfrac{3!\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{10}$ となる。

(v)　A の合計点 12 で B の合計点 3 のとき

・1 枚目, 3 枚目, 5 枚目が{数 3，数 4，数 5}，2 枚目, 4 枚目が{数 1，数 2}の場合

このときの確率は，$\dfrac{3!\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{10}$ となる。

(i)～(v)より，A の合計点が B の合計点より大きくなる確率は，

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

© 電送数学舎 2024

(3)　ケース 2 のとき，束にしたカードについて，上から数えたカードとそれを保有する人の関係は，数 0 のカードの位置で場合分けをすると右表のようになる。

	(Ⅰ)	(Ⅱ)	(Ⅲ)	(Ⅳ)	(Ⅴ)	(Ⅵ)
1 枚目	数 0	B	B	B	B	B
2 枚目	B	数 0	A	A	A	A
3 枚目	A	A	数 0	B	B	B
4 枚目	B	B	B	数 0	A	A
5 枚目	A	A	A	A	数 0	B
6 枚目	B	B	B	B	B	数 0

すると，A の最高点が 5 であるのは，数 5 のカードの位置が次のときである。

(Ⅰ), (Ⅱ)のときは上から 3 枚目または 5 枚目，(Ⅲ), (Ⅳ)のときは上から 2 枚目または 5 枚目，(Ⅴ), (Ⅵ)のときは上から 2 枚目または 4 枚目となり，その確率は，

$$\left(\frac{1\times1\times4!}{6!}\times2\right)\times6=\frac{1}{15}\times6=\frac{2}{5}$$

(4)　ケース 2 のとき，(Ⅰ)～(Ⅵ)のいずれの場合も，数 0 以外のカードを，A は 2 枚，B は 3 枚保有することに注意すると，$0+1+2+3+4+5=15$ から，A の合計点が B の合計点より大きくなるのは，

(i)　A の合計点 8 で B の合計点 7 のとき

A が{数 3，数 5}，B が{数 1，数 2，数 4}を保有する場合となり，このときの確率は，

$$\frac{1\times2!\times3!}{6!}\times6=\frac{1}{60}\times6=\frac{1}{10}$$

(ii)　A の合計点 9 で B の合計点 6 のとき

A が{数 4，数 5}，B が{数 1，数 2，数 3}を保有する場合となり，このときの確率は，

$$\frac{1\times2!\times3!}{6!}\times6=\frac{1}{60}\times6=\frac{1}{10}$$

(i)(ii)より，A の合計点が B の合計点より大きくなる確率は，

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

［解　説］

読解力と慎重さの要求される確率問題です。後半の(3)(4)については，解答例の表を見ながら処理をしています。なお，(4)の場合分けを考えれば，(2)は余事象を利用した方がよかったようです。

© 電送数学舎 2024

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(2\cos\theta+\sin\theta,\ 2\sin\theta-\cos\theta,\ \dfrac{3}{2}\right)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta+\sin\theta,\ \sin\theta-\cos\theta,\ 1)$となる。

t を実数として，直線 PQ をパラメータ表示すると，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\right)+t(\cos\theta+\sin\theta,\ \sin\theta-\cos\theta,\ 1)$$
$$=\left(\cos\theta+t(\cos\theta+\sin\theta),\ \sin\theta+t(\sin\theta-\cos\theta),\ \frac{1}{2}+t\right)$$

zx 平面$(y=0)$との交点は，$\sin\theta+t(\sin\theta-\cos\theta)=0 \cdots\cdots(*)$から，

(i)　$\sin\theta-\cos\theta=0\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$のとき　$(*)$は成立しない。

(ii)　$\sin\theta-\cos\theta\neq 0\ \left(\theta\neq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$のとき　$(*)$は$t=-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$で成立する。

(i)(ii)より，直線 PQ と zx 平面が 1 つの点だけで交わる θ の範囲は，

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta\leqq 2\pi$$

(2)　(i)　直線 PQ と zx 平面の交点を$\mathrm{R}(p,\ 0,\ q)$とすると，(1)から，

$$p=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}(\cos\theta+\sin\theta)$$
$$=\frac{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)-\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}=-\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}$$
$$q=\frac{1}{2}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2(\sin\theta-\cos\theta)}$$

(ii)　$$p^2-2q^2=\frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-2\cdot\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{4(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\frac{2-(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2(\sin\theta-\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{2-(1+2\sin\theta\cos\theta)^2}{2(1-2\sin\theta\cos\theta)}=\frac{1}{2}$$

［解　説］

空間図形についての基本題です。複雑な計算もありません。

© 電送数学舎 2024