$\boxed{1}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ に対して，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して，a_n を $a_n = \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \sin\dfrac{3}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2}$ と定めるとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(3)　α を実数とする。自然数 n に対して，b_n を $b_n = n^\alpha \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ が収束するような α の値の範囲とそのときの極限値を求めよ。

2

解答解説のページへ

b, c は実数で $c>0$ とする。4 次方程式 $x^4+bx^2+c^2=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　4 個の相異なる虚数解をもつための b と c の条件を求めよ。

(2)　(1)で求めた条件の下で，二重根号を用いずに 4 個の解を表せ。

(3)　(2)で求めた 4 個の解が，複素数平面上の同一円周上にあるための b と c の条件を求めよ。

(4)　(2)で求めた 4 個の解が，複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶための b と c の条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

固定された直線に円が接しながら滑ることなく回転するときに，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドというが，その類似として，固定された半円に線分が接しながら滑ることなく回転するときに，線分上の定点が描く曲線を考える。すなわち，xy 平面の単位円 $x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ の部分にある半円を C とし，長さ π の線分 AB が半円 C に接しながら滑らずに動くとする。始めに点 A は $(1,\ 0)$，点 B は $(1,\ \pi)$ の位置にあり，点 B が $(-1,\ 0)$ に到達したときに動きを止めるものとし，この間に点 A が描く xy 平面上の曲線を L とする。次の問いに答えよ。

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \theta \sin a\theta\, d\theta$ と $\displaystyle\int \theta^2 \cos a\theta\, d\theta$ をそれぞれ求めよ。ただし，a は正の定数とする。

(2)　半円 C と線分 AB の接点が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のときの点 A の座標を求めよ。

(3)　曲線 L と x 軸および直線 $x=-1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える。

$$5p^2+2p=q^2+5q\,,\ \ q=ap\,,\ \ pq\neq 0$$

次の問いに答えよ。

(1)　$a\neq\pm\sqrt{5}$ のとき，p と q をそれぞれ a を用いて表せ。

(2)　a は有理数で，$a=\dfrac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする。ただし，k は自然数，m は整数とする。

(i)　$5m-2k$ が $5k^2-m^2$ の倍数ならば，p と q はともに整数であることを証明せよ。

(ii)　逆に，p と q がともに整数ならば，$5m-2k$ は $5k^2-m^2$ の倍数であることを証明せよ。

(iii) p と q がともに整数ならば，121 は $5k^2-m^2$ の倍数であることを証明せよ。

1　問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = \sin x - x + \dfrac{x^2}{2}$ とおくと，

$$f'(x) = \cos x - 1 + x,\ f''(x) = -\sin x + 1 \geqq 0$$

$x \geqq 0$ のとき，$f'(x)$ は単調に増加し $f'(x) \geqq f'(0) = 0$ となり，これより $f(x)$ も単調に増加し，$f(x) \geqq f(0) = 0$ である。

したがって，$x \geqq 0$ において，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \sin x$ ………①

(2)　$x \geqq 0$ において，$g(x) = \sin x - x$ とおくと，$g'(x) = \cos x - 1 \leqq 0$

これより，$g(x)$ は単調に減少し，$g(x) \leqq g(0) = 0$ すなわち $\sin x \leqq x$ ………②

①②より，$x \geqq 0$ において，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \sin x \leqq x$ ………③

さて，$a_n = \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \sin\dfrac{3}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k}{n^2}$ に対して，$\dfrac{k}{n^2} > 0$ なので，③から $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k^2}{n^4} \leqq \sin\dfrac{k}{n^2} \leqq \dfrac{k}{n^2}$ となり，$k = 1$ から n まで和をとると，

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} \leqq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

すると，$\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) - \dfrac{1}{2n^4}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$ となり，

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leqq a_n \leqq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{12n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) \to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

(3)　$b_n = n^\alpha \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ に対し，③より，$x > 0$ で，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) \leqq \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot x$ から，$x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \leqq \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \leqq x^{\frac{1}{2}}$ となり，$x = \dfrac{1}{n}$ から $\dfrac{2}{n}$ まで積分すると，

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)dx \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{2}}\,dx \text{ ………④}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{-\frac{3}{2}}$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}\right\} = \frac{4\sqrt{2}-1}{5}n^{-\frac{5}{2}}$$

④より，$\dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}-1}{5}n^{-\frac{5}{2}} \leqq \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \leqq \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{-\frac{3}{2}}$ となり，

$$\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{\alpha-\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{2}-1}{5}n^{\alpha-\frac{5}{2}} \leqq b_n \leqq \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{\alpha-\frac{3}{2}}$$

$$\left\{\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}-\frac{4\sqrt{2}-1}{5}\cdot\frac{1}{n}\right\}n^{\alpha-\frac{3}{2}} \leqq b_n \leqq \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}n^{\alpha-\frac{3}{2}}\cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，$\alpha<\dfrac{3}{2}$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\frac{3}{2}}=0$，$\alpha=\dfrac{3}{2}$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\frac{3}{2}}=1$，$\alpha>\dfrac{3}{2}$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\frac{3}{2}}=\infty$ なので，数列 $\{b_n\}$ が収束するのは，⑤から $\alpha \leqq \dfrac{3}{2}$ のときで，

$$\alpha<\frac{3}{2} \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} b_n=0，\ \alpha=\frac{3}{2} \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$$

［解　説］

はさみうちの原理を適用する数列の極限の問題です。そのためには，(1)で誘導の付いている不等式①以外に，誘導のない不等式②が重要になります。

2

問題のページへ

(1)　$c>0$ のとき，4 次方程式 $x^4+bx^2+c^2=0$ ……①に対して，$x^2=t$ とおくと，①は $t^2+bt+c^2=0$ ……②となり，

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{2}$$

さて，①が 4 個の相異なる虚数解をもつには，②が異なる 2 つの解をもつことが必要なので，$b^2-4c^2\neq 0$ となり，

(i)　$b^2-4c^2>0$ $(b<-2c,\ 2c<b)$ のとき

$c^2>0$ から，②は 2 つの異なる正の解または 2 つの異なる負の解をもつ。

すると，①が 4 個の相異なる虚数解をもつ条件は，②が 2 つの異なる負の解をもつことに対応し，$-\dfrac{b}{2}<0$ すなわち $b>0$ である。

よって，$b<-2c,\ 2c<b$ と合わせると，$0<2c<b$ となる。

(ii)　$b^2-4c^2<0$ $(-2c<b<2c)$ のとき

②は異なる 2 つの虚数解 $t=\dfrac{-b\pm\sqrt{4c^2-b^2}\,i}{2}$ をもち，$x^2=t$ から，①は 4 個の相異なる虚数解をもつ。

(i)(ii)より，①が 4 個の相異なる虚数解をもつ条件は，

$$0<2c<b,\ -2c<b<2c$$

(2)　p,q を実数として，$x=p+qi$ $(q\neq 0)$ とおくと，$x=p^2-q^2+2pqi$ となる。

(i)　$0<2c<b$ のとき　$p^2-q^2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}$ ……③，$2pq=0$ ……④

$q\neq 0$ なので，④から $p=0$ となり，③に代入すると，

$$q^2=-\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}=\frac{b\mp\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{2}=\frac{2b\mp2\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{4}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{b+2c}\mp\sqrt{b-2c}\right)^2}{4}\quad(\text{複号同順})$$

これより，$q=\pm\dfrac{\sqrt{b+2c}\mp\sqrt{b-2c}}{2}$ となり，①の解は，

$$x=\frac{\sqrt{b+2c}\pm\sqrt{b-2c}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{b+2c}\pm\sqrt{b-2c}}{2}i$$

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき　$p^2-q^2=-\dfrac{b}{2}$ ……⑤，$2pq=\pm\dfrac{\sqrt{4c^2-b^2}}{2}$ ……⑥

⑥から $q=\pm\dfrac{\sqrt{4c^2-b^2}}{4p}$ となり，⑤に代入すると $p^2-\dfrac{4c^2-b^2}{16p^2}=-\dfrac{b}{2}$ から，

$$16p^4-(4c^2-b^2)+8bp^2=0,\ 16p^4+8bp^2-(2c+b)(2c-b)=0$$

これより，$\{4p^2+(2c+b)\}\{4p^2-(2c-b)\}=0$ となり，$2c+b>0$ から，

$$4p^2-(2c-b)=0,\ p^2=\frac{2c-b}{4},\ p=\pm\frac{\sqrt{2c-b}}{2}$$

⑤に代入すると $q^2=\dfrac{2c-b}{4}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{2c+b}{4}$ から，$q=\pm\dfrac{\sqrt{2c+b}}{2}$ となり，①の解は，

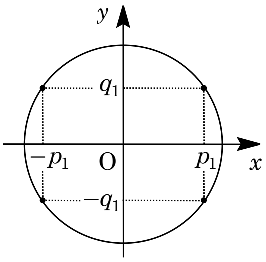
$$x=\frac{\sqrt{2c-b}\pm\sqrt{2c+b}\,i}{2},\ -\frac{\sqrt{2c-b}\pm\sqrt{2c+b}\,i}{2}$$

(3)　①の 4 個の解が，複素数平面上の同一円周上にあるのは，

(i)　$0<2c<b$ のとき　4 個の解はすべて虚軸上にあり，同一円周上にない。

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき

$p_1=\dfrac{\sqrt{2c-b}}{2}>0$，$q_1=\dfrac{\sqrt{2c+b}}{2}>0$ とおくと，4 個の解は，p_1+q_1i，p_1-q_1i，$-p_1+q_1i$，$-p_1-q_1i$ となる。



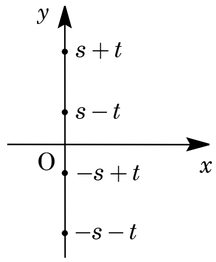
複素数平面上に図示すると，4 個の解は，中心が原点で半径 $\sqrt{{p_1}^2+{q_1}^2}$ の円周上にある。

(i)(ii)より，求める条件は $-2c<b<2c$ である。

(4)　①の 4 個の解が，複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶのは，

(i)　$0<2c<b$ のとき

$s=\dfrac{\sqrt{b+2c}}{2}>0$，$t=\dfrac{\sqrt{b-2c}}{2}>0$ とおくと，4 個の解は，$(s+t)i$，$(s-t)i$，$(-s+t)i$，$(-s-t)i$ となる。



$s+t>s-t>0$ に注目し，複素数平面上に図示すると，4 個の解は虚軸上に並び，$(-s-t)i=-(s+t)i$，$(-s+t)i=-(s-t)i$ から，等間隔に並ぶ条件は，

$$(s+t)-(s-t)=(s-t)-(-s+t),\ 2t=2s-2t$$

すると，$s=2t$ から $\dfrac{\sqrt{b+2c}}{2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{b-2c}}{2}$ となり，$b+2c=4(b-2c)$ より，

$3b=10c$ （この式は $0<2c<b$ を満たしている）

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき　4 個の解は同一円周上にあるので，同一直線上にない。

(i)(ii)より，求める条件は $3b=10c$ である。

［解 説］

複 2 次方程式と複素数平面の融合問題です。質と量，ともにハードです。

$\boxed{3}$

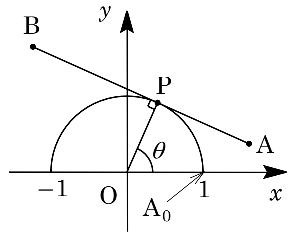
問題のページへ

(1) 積分定数をC_1，C_2として，

$$\int \theta\sin a\theta\,d\theta = -\frac{1}{a}\theta\cos a\theta + \frac{1}{a}\int \cos a\theta\,d\theta = -\frac{1}{a}\theta\cos a\theta + \frac{1}{a^2}\sin a\theta + C_1$$

$$\begin{aligned}\int \theta^2\cos a\theta\,d\theta &= \frac{1}{a}\theta^2\sin a\theta - \frac{2}{a}\int \theta\sin a\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{a}\theta^2\sin a\theta - \frac{2}{a}\left(-\frac{1}{a}\theta\cos a\theta + \frac{1}{a^2}\sin a\theta\right) + C_2\\ &= \frac{1}{a}\theta^2\sin a\theta + \frac{2}{a^2}\theta\cos a\theta - \frac{2}{a^3}\sin a\theta + C_2\end{aligned}$$

(2) 半円$C: x^2+y^2=1\ (y \geqq 0)$に接しながら滑らずに動く長さ$\pi$の線分ABについて，$C$との接点を$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，また$C$上の点$\mathrm{A}_0(1,\ 0)$とおく。



すると，弧$\mathrm{A}_0\mathrm{P}$の長さは$1\cdot\theta=\theta$から$\mathrm{AP}=\theta$となり，また$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$の向きは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$を原点まわりに$-\frac{\pi}{2}$だけ回転したものであることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \theta\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \theta(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} = (\cos\theta+\theta\sin\theta,\ \sin\theta-\theta\cos\theta)$となり，

$$\mathrm{A}(\cos\theta+\theta\sin\theta,\ \sin\theta-\theta\cos\theta)$$

(3) $\mathrm{A}(x,\ y)$とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$で，$x=\cos\theta+\theta\sin\theta$，$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$

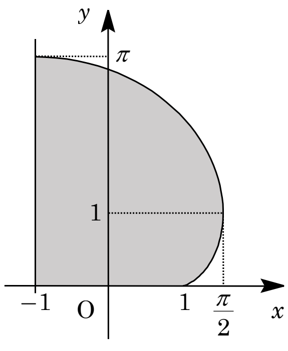
$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta = \theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta = \theta\sin\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	
x	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	-1
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$		$+$	0
y	0	↗	1	↗	π

これより，x，yの増減は右表のようになる。

ここで，点Aの軌跡である曲線Lについて，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$のとき$y=y_1(x)$，$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$のとき$y=y_2(x)$とおき，$L$と$x$軸および直線$x=-1$で囲まれた部分の面積を$S$とすると，



$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} y_2(x)\,dx - \int_{1}^{\frac{\pi}{2}} y_1(x)\,dx\\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta\,d\theta\\ &\quad - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta\,d\theta\\ &= -\int_{0}^{\pi} (\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta\,d\theta\end{aligned}$$

被積分関数を変形して，

$$S=-\int_0^{\pi}(\theta\sin\theta\cos\theta-\theta^2\cos^2\theta)\,d\theta=-\int_0^{\pi}\left\{\frac{\theta\sin 2\theta}{2}-\frac{\theta^2(1+\cos 2\theta)}{2}\right\}d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\pi}\theta^2\,d\theta=\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$ であり，また(1)の結果を利用すると，

$$\int_0^{\pi}\theta\sin 2\theta\,d\theta=\left[-\frac{1}{2}\theta\cos 2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot\pi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\theta^2\cos 2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^2\sin 2\theta+\frac{2}{4}\theta\cos 2\theta-\frac{2}{8}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}$$

以上より，$\displaystyle S=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}$ である。

［解　説］

パラメータ曲線と面積に関する頻出題です。なお, (3)の面積については, y 軸方向に積分しても構いません。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$pq \neq 0$ で，$5p^2 + 2p = q^2 + 5q$ ……①，$q = ap$ ……②に対して，②を①に代入すると，$5p^2 + 2p = a^2p^2 + 5ap$ から，$(5 - a^2)p^2 = (5a - 2)p$

$p \neq 0$，$a \neq \pm\sqrt{5}$ より $p = \dfrac{5a - 2}{5 - a^2}$ ……③となり，$q = \dfrac{a(5a - 2)}{5 - a^2}$ ……④である。

(2)　k は自然数，m は整数で，互いに素であるとき，$a = \dfrac{m}{k}$ とすると，③④から，

$$p = \frac{5 \cdot \frac{m}{k} - 2}{5 - \frac{m^2}{k^2}} = \frac{k(5m - 2k)}{5k^2 - m^2} \text{……⑤},\ q = \frac{m}{k} \cdot \frac{5 \cdot \frac{m}{k} - 2}{5 - \frac{m^2}{k^2}} = \frac{m(5m - 2k)}{5k^2 - m^2} \text{……⑥}$$

(i)　$5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数のとき，l を整数として，$5m - 2k = l(5k^2 - m^2)$

⑤より $p = \dfrac{kl(5k^2 - m^2)}{5k^2 - m^2} = kl$，⑥より $p = \dfrac{ml(5k^2 - m^2)}{5k^2 - m^2} = ml$

これより，p と q はともに整数である。

(ii)　p, q が 0 でない整数のとき，②から $q = \dfrac{m}{k}p$ となり，$mp = kq$ ………⑦

さて，k と m は互いに素なので，⑦から p は k の倍数となることより，i を整数として $p = ki$ と表せ，また⑤から $k(5m - 2k) = p(5k^2 - m^2)$ となるので，

$k(5m - 2k) = ki(5k^2 - m^2)$，$5m - 2k = i(5k^2 - m^2)$ ………⑧

同様に，⑦から q は m の倍数となるので，j を整数として $q = mj$ と表せ，また⑥から $m(5m - 2k) = q(5k^2 - m^2)$ となるので，

$m(5m - 2k) = mj(5k^2 - m^2)$，$5m - 2k = j(5k^2 - m^2)$ ………⑨

⑧⑨より，p と q がともに整数ならば，$5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数である。

(iii)　⑧より，$5m + m^2i = 2k + 5k^2i$ となり，$m(5 + mi) = k(2 + 5ki)$

k と m は互いに素なので，i' を整数として，$5 + mi = ki'$，$2 + 5ki = mi'$ となり，

$ki' - mi = 5$ ……⑩，$mi' - 5ki = 2$ ……⑪

⑩×25－⑪×2 より，$(25k - 2m)i' - 5(5m - 2k)i = 121$ となり，⑧を代入すると，

$(25k - 2m)i' - 5(5k^2 - m^2)i^2 = 121$ ………⑫

⑪×5－⑩×2 より，$(5m - 2k)i' - (25k - 2m)i = 0$ となり，⑧を代入すると，

$(5k^2 - m^2)ii' - (25k - 2m)i = 0$，$25k - 2m = (5k^2 - m^2)i'$ ………⑬

⑬を⑫に代入すると，$(5k^2 - m^2)i'^2 - 5(5k^2 - m^2)i^2 = 121$ となり，

$(5k^2 - m^2)(i'^2 - 5i^2) = 121$

したがって，121 は $5k^2 - m^2$ の倍数である。

［解 説］

整数が題材の論証問題です。(3)(ii)の解答例は，やや冗長な感じもしますが。また(iii)では問題文にいきなり出現した 121 を作ることをまず考え，式変形をしています。