

1

解答例のページへ

数列 $\{I_k\}$ を, $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - k \sin 2x| dx$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) によって定める。た

だし a は $0 < a < 2$ を満たす実数である。次の問いに答えよ。

(1) I_k を, 積分を用いない a と k のみの式で表せ。

(2) 2 以上の整数 n に対し, 3 つの数 $\log n$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ の大小を比較せよ。ただし

$\log$ は自然対数である。

(3) b を実数とする。 $J_n = \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^n I_k + bn^2 \right)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) によって定まる数列 $\{J_n\}$ が収束するとき, a と b を求めよ。また, そのときの極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を求めよ。

ただし $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty$ が成り立つことは用いてよい。

2

解答例のページへ

座標空間において 4 点 $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$, $C(1, 4, 2)$, $D(-1, 1, 0)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C を含む平面において、点 B を通り直線 AC に垂直な直線を l 、点 C を通り直線 AB に垂直な直線を m として、 l と m の交点を E とする。点 E の座標を求めよ。
- (2) $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し、線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P 、線分 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q 、線分 CD を $(1-t):t$ に内分する点を R 、線分 BD を $(1-t):t$ に内分する点を S とする。4 点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。
- (3) 4 点 P, Q, R, S を含む平面を α とする。平面 α による四面体 $ABCD$ の切り口の面積を t の式で表せ。
- (4) 平面 α に平行な平面のうちで点 E を通るものを β とすると、四面体 $ABCD$ は平面 β によって 2 つの部分に分けられる。それらのうちで辺 BC を含む方の図形の体積を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

自然数 N の正の約数の個数を n とする。 N の正の約数を、小さい順に $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ と表す。したがって、 $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{n-1} < d_n = N$ である。いま、 $n \geq 5$ かつ $(d_3 - d_2)(d_4 - d_2)(d_5 + d_2) = (2d_2)^3$ が満たされているとする。次の問いに答えよ。

- (1) $2 < a < b < c$ かつ $(a-2)(b-2)(c+2) = 2^6$ を満たす整数 a, b, c の組をすべて求めよ。
- (2) $d_2 \neq 2$ であることを示せ。
- (3) $d_2 = 3$ であることを示せ。
- (4) d_3, d_4, d_5 を求めよ。

4

[解答例のページへ](#)

xy 平面において 3 点 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$ を考える。ただし α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数である。また, $f(\theta) = 2\cos\theta - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 O と直線 PQ の距離を α の式で表せ。

(2) 次の等式を示せ。 $f(\theta)\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta - \alpha}{2}$

(3) 媒介変数 t を用いて, $x = f(t)\cos t$, $y = f(t)\sin t$ ($0 < t < \frac{\pi}{3}$) と表される曲線を C とする。曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有することを示せ。また, その共有点を R とするとき, $\angle POR$ を α の式で表せ。

1

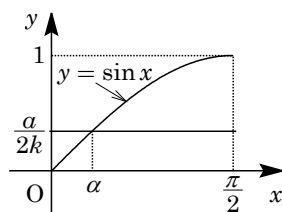
問題のページへ

(1) $0 < a < 2$ のとき, $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - k \sin 2x| dx$ ($k=1, 2, 3, \dots$) に対して,

$$\begin{aligned} a \cos x - k \sin 2x &= a \cos x - 2k \sin x \cos x \\ &= 2k \cos x \left(\frac{a}{2k} - \sin x \right) \end{aligned}$$

ここで, $0 < \frac{a}{2k} < \frac{1}{k} \leq 1$ から, $\sin \alpha = \frac{a}{2k}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

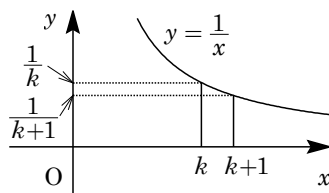
とおくと, $\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{a}{2k}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{2k^2}$ となり,



$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\alpha} (a \cos x - k \sin 2x) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} -(a \cos x - k \sin 2x) dx \\ &= \left[a \sin x + \frac{k}{2} \cos 2x \right]_0^{\alpha} - \left[a \sin x + \frac{k}{2} \cos 2x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a \sin \alpha + \frac{k}{2} (\cos 2\alpha - 1) - a(1 - \sin \alpha) - \frac{k}{2} (-1 - \cos 2\alpha) \\ &= 2a \sin \alpha + k \cos 2\alpha - a = 2a \cdot \frac{a}{2k} + k \left(1 - \frac{a^2}{2k^2} \right) - a = \frac{a^2}{2k} + k - a \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

(2) $1 \leq k \leq x \leq k+1$ のとき, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ となり,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx &< \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= [\log x]_k^{k+1} = \log(k+1) - \log k \text{ より,} \\ \frac{1}{k+1} &< \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k} \end{aligned}$$



$n \geq 2$ のとき, 各辺の和をとって, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

そして, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} = \log n - \log 1 = \log n$ から,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \dots\dots\dots ②$$

(3) ①より, $\sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a^2}{2k} + k - a \right) = \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} n(n+1) - an$ となり, $n \geq 2$ で,

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^n I_k + bn^2 \right) = \frac{1}{\log n} \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} n(n+1) - an + bn^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\log n} \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{2} + b \right) n^2 + \left(\frac{1}{2} - a \right) n \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left\{ \left(\frac{1}{2} + b \right) n + \left(\frac{1}{2} - a \right) \right\} \frac{n}{\log n} \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

さて、②を変形すると、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 < \log n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ となり、

$$\log n + \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n + 1, \quad 1 + \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{\log n}$$

これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$ となり、また $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty$ より、数列 $\{J_n\}$ が収束

するには、③から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} + b \right) n + \left(\frac{1}{2} - a \right) \right\} = 0$ が必要である。

すると、 $\frac{1}{2} + b = 0$ かつ $\frac{1}{2} - a = 0$ となり、すなわち $a = \frac{1}{2}$ 、 $b = -\frac{1}{2}$ である。

逆に、 $a = \frac{1}{2}$ 、 $b = -\frac{1}{2}$ のとき、 $J_n = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{a^2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

[コメント]

定積分の計算と極限の融合問題です。(1)(2)の結果を(3)で利用するという誘導は丁寧ですが、かなり息の長い議論が必要です。

2

問題のページへ

- (1) 平面
- $x=1$
- 上の 3 点
- $A(1, 1, 0)$
- ,
- $B(1, 0, 2)$
- ,
- $C(1, 4, 2)$

に対して, $\overrightarrow{AB}=(0, -1, 2)$, $\overrightarrow{AC}=(0, 3, 2)$ となり,

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}, |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{13}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=1$$

さて, B を通り直線 AC に垂直な直線 l と, C を通り直線 AB に垂直な直線 m の交点を E とし, p, q を実数として $\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ とおくと,

$$\overrightarrow{CE}=p\overrightarrow{AB}+(q-1)\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}=(p-1)\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$ から, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}=0$ となり,

$$5p+(q-1)=0, (p-1)+13q=0$$

これより, $(p, q)=\left(\frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right)$ となり, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\left(\frac{3}{16}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}\right)$ から,

$$\overrightarrow{OE}=(1, 1, 0)+\frac{3}{16}(0, -1, 2)+\frac{1}{16}(0, 3, 2)=\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

したがって, 点 E の座標は $E\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ となる。

- (2) 実数 t ($0 < t < 1$) に対し, 線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P , 線分 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とすると,

$$P(1, 1-t, 2t), Q(1, 3t+1, 2t)$$

また, 点 $D(-1, 1, 0)$ をとり, 線分 CD を $(1-t):t$ に内分する点を R , 線分 BD を $(1-t):t$ に内分する点を S とすると,

$$R(2t-1, 3t+1, 2t), S(2t-1, 1-t, 2t)$$

すると, 4 点 P, Q, R, S は平面 $z=2t$ 上にある。

- (3) 平面 $\alpha: z=2t$ 上において, 四面体 $ABCD$ の切り口は長方形 $PQRS$ で, その面積 S は,

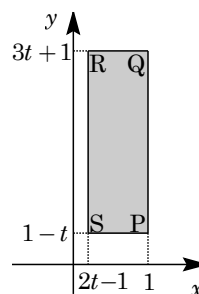
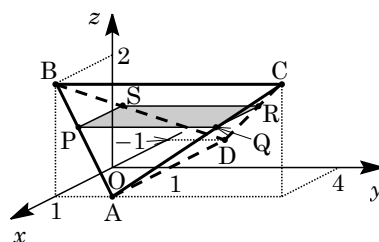
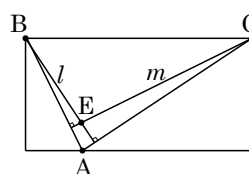
$$\begin{aligned} S &= \{1-(2t-1)\}\{3t+1-(1-t)\} = (2-2t) \cdot 4t \\ &= 8t(1-t) \end{aligned}$$

- (4) 平面 α に平行な平面のうちで点 E を通るものを β とすると, 平面 β の方程式は, (1) から $z=\frac{1}{2}$ となる。

また, (3) から $\alpha: z=2t$ 上での面積 S は, $t=\frac{z}{2}$ より,

$$S=8 \cdot \frac{z}{2} \left(1-\frac{z}{2}\right)=2z(2-z)=4z-2z^2$$

これより, 四面体 $ABCD$ について, 平面 β の上側の体積を V とすると,



$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^2 S dz = \int_{\frac{1}{2}}^2 (4z - 2z^2) dz = \left[2z^2 - \frac{2}{3}z^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 = 2\left(4 - \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3}\left(8 - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{15}{2} - \frac{21}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

[コメント]

空間図形と体積の融合問題です。与えられた 4 点の位置関係に着目することが、最大のポイントです。

3

問題のページへ

- (1) 整数 a, b, c に対し, $2 < a < b < c$ かつ $(a-2)(b-2)(c+2) = 2^6 \cdots \cdots \textcircled{1}$

①より, p, q, r を 0 以上の整数とし, $a-2 = 2^p$, $b-2 = 2^q$, $c+2 = 2^r$ とおくと,

$$a = 2^p + 2, \quad b = 2^q + 2, \quad c = 2^r - 2$$

すると, $2^p \cdot 2^q \cdot 2^r = 2^6$ から $2^{p+q+r} = 2^6$ となり, $p+q+r = 6 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$2 < 2^p + 2 < 2^q + 2 < 2^r - 2$ より, $0 \leq p < q < r \cdots \cdots \textcircled{3}$ が必要となる。

②③より, $(p, q, r) = (0, 1, 5), (0, 2, 4), (1, 2, 3)$ となる。

(i) $(p, q, r) = (0, 1, 5)$ のとき $(a, b, c) = (3, 4, 30)$ となり適する。

(ii) $(p, q, r) = (0, 2, 4)$ のとき $(a, b, c) = (3, 6, 14)$ となり適する。

(iii) $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ のとき $(a, b, c) = (4, 6, 6)$ となり不適である。

(i)~(iii)より, ①を満たす a, b, c は, $(a, b, c) = (3, 4, 30), (3, 6, 14)$ である。

- (2) 自然数 N の正の約数を, 小さい順に $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}, d_n$ とし, $n \geq 5$ のとき,

$$(d_3 - d_2)(d_4 - d_2)(d_5 + d_2) = (2d_2)^3 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで, $d_2 = 2$ と仮定すると, $2 < d_3 < d_4 < d_5 < \cdots < d_{n-1} < d_n = N$ で, ④より,

$$(d_3 - 2)(d_4 - 2)(d_5 + 2) = 2^6 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

(1)の結果から, ⑤は $(d_3, d_4, d_5) = (3, 4, 30), (3, 6, 14)$ で満たされる。

- (a) $(d_3, d_4, d_5) = (3, 4, 30)$ のとき

$d_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ なので, 5 は N の約数であるが, $d_5 \neq 5$ から不適である。

- (b) $(d_3, d_4, d_5) = (3, 6, 14)$ のとき

$d_5 = 2 \cdot 7$ なので, 7 は N の約数であるが, $d_5 \neq 7$ から不適である。

- (a)(b)より, $d_2 = 2$ のとき⑤を満たす (d_3, d_4, d_5) は存在しない。

したがって, $d_2 \neq 2$ である。

- (3) (2)から $d_2 \neq 2$ なので, N は 2 を約数にもたない。すなわち N は奇数である。

すると, d_2, d_3, d_4, d_5 は奇数であり, これより $d_3 - d_2, d_4 - d_2, d_5 + d_2$ はすべて偶数となり, ④より,

$$(d_3 - d_2)(d_4 - d_2)(d_5 + d_2) = 2^3 d_2^3 \quad (3 \leq d_2 < d_3 < d_4 < d_5) \cdots \cdots \textcircled{6}$$

k, l, m を自然数とし, $d_3 - d_2 = 2k, d_4 - d_2 = 2l, d_5 + d_2 = 2m$ とおくと,

$$d_3 = 2k + d_2, \quad d_4 = 2l + d_2, \quad d_5 = 2m - d_2$$

すると, $2k \cdot 2l \cdot 2m = 2^3 d_2^3$ から $klm = d_2^3 \cdots \cdots \textcircled{7}$

$3 \leq d_2 < 2k + d_2 < 2l + d_2 < 2m - d_2$ より, $1 \leq k < l < m \cdots \cdots \textcircled{8}$ が必要となる。

さて, d_2 は N の 1 以外の約数のうちで最小数から素数となり, ⑦⑧より,

$$(k, l, m) = (1, d_2, d_2^2), \quad (d_3, d_4, d_5) = (2 + d_2, 3d_2, 2d_2^2 - d_2)$$

すると, $d_4 = 3d_2$ から d_4 は 3 の倍数となり, N は 3 を約数にもつ。

したがって, $d_2 = 3$ である。

このとき $(d_3, d_4, d_5) = (2+3, 3 \cdot 3, 2 \cdot 3^2 - 3) = (5, 9, 15)$ となり, ⑥を満たす。
(4) (3)より, $(d_3, d_4, d_5) = (5, 9, 15)$ である。

[コメント]

かなり難しめの整数問題です。(1)から(2)へはスムーズにつながりますが, (3)では(2)のプロセスを参考にして, 素数 d_2 に気づくかどうか問われています。

4

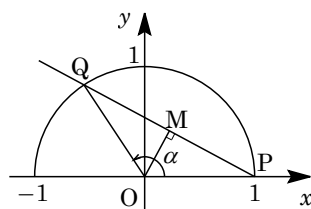
問題のページへ

- (1) 3 点
- $O(0, 0)$
- ,
- $P(1, 0)$
- ,
- $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$
- (
- $0 < \alpha < \pi$
-)

に対して、線分 PQ の中点を M とすると、線分 OM は $\angle POQ$ の二等分線となる。

これより、 O と直線 PQ の距離 d は、

$$d = OM = OP \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$



- (2)
- $f(\theta) = 2\cos \theta - 1$
- に対して、
- $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos \theta \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$

$$2\cos \theta \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\theta + \theta - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\theta - \theta + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} + \cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = -2\sin \frac{2\theta - \frac{\alpha}{2} + \theta - \frac{\alpha}{2}}{2} \sin \frac{2\theta - \frac{\alpha}{2} - \theta + \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$= -2\sin \frac{3\theta - \alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2}$$

したがって、 $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2}$ となる。

- (3) 曲線
- $C: x = f(t)\cos t$
- ,
- $y = f(t)\sin t$
- (
- $0 < t < \frac{\pi}{3}$
-) を極方程式で表すと、

$$r = f(\theta) = 2\cos \theta - 1 \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{3}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線 PQ を極方程式で表すと、 $r \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = d$ から、(1)の結果を用いて、

$$r \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②を連立すると、 $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$ となり、(2)から、

$$\cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ から $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{6}$ となるので、 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ である。

また、 $-\frac{\alpha}{2} < \frac{3\theta - \alpha}{2} < \frac{\pi - \alpha}{2}$ ($0 < \alpha < \pi$) から、 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\alpha}{2} < 0$, $0 < \frac{\pi - \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ と

なり、③を満たす θ は、 $\frac{3\theta - \alpha}{2} = 0$ より $\theta = \frac{\alpha}{3}$ である。

これより、 θ はただ 1 つ決まり、曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有する。

そして、その共有点を R とするとき、 $\angle POR = \frac{\alpha}{3}$ である。

[コメント]

極方程式についての標準的な問題です。出題数が少ない分野のためか、(1)と(2)で、(3)への細やかな誘導が付けられています。