

第 1 講 直線の方程式

直線は、異なる 2 点によって決定されます。この 2 点を A, B とし、直線 AB 上の任意の点を P とおきます。

$$\overrightarrow{AP} = t' \overrightarrow{AB} \quad (t' \text{ は実数})$$

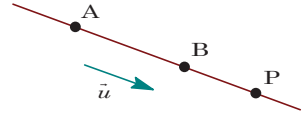
点 P の始点を原点 O に変更すると、

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t' \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t' \overrightarrow{AB} \quad (t' \text{ は実数})$$

ここで、直線 AB に平行なベクトルを \vec{u} ($\vec{u} \neq \vec{0}$) とすると、 \vec{u} は \overrightarrow{AB} の実数倍なので、 $t' \overrightarrow{AB} = t \vec{u}$ とおくことができ、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \vec{u} \quad (t \text{ は実数})$$

と表すことができます。この \vec{u} を直線 AB の方向ベクトルといいます。



直線のパラメータ表示

点 A を通り、ベクトル \vec{u} に平行な直線

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \vec{u} \quad (t \text{ は実数})$$

$P(x, y, z)$, $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ とおくと、

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (t \text{ は実数}) \dots\dots\dots(*)$$

例題 1 2 点 A(4, 5, 2), B(10, 15, 4) を通る直線が xz 平面および xy 平面と交わる点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。

角解 $\overrightarrow{AB} = (6, 10, 2) = 3(3, 5, 1)$ より、直線 AB のパラメータ表示は、

$$(x, y, z) = (4, 5, 2) + t(3, 5, 1)$$

$$x = 4 + 3t, \quad y = 5 + 5t, \quad z = 2 + t \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

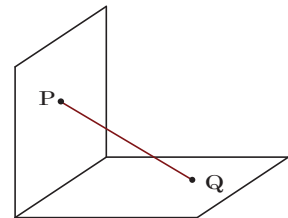
さて、xz 平面 : $y = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$, xy 平面 : $z = 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$

①②より、 $5 + 5t = 0$ から $t = -1$ となり、 $x = 1, z = 1$ から P(1, 0, 1) である。

①③より、 $2 + t = 0$ から $t = -2$ となり、 $x = -2, y = -5$ から Q(-2, -5, 0) である。

$$\text{よって、} PQ = \sqrt{(1+2)^2 + (0+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{35}$$

《注》 t の値だけから、 $PQ = |-1 - (-2)| \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$ と計算できます。



次に、(*)から、パラメータ t を消去して、 x, y, z の関係式を一般的に求めます。

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ のときは、 $t = \frac{x-x_0}{a}, t = \frac{y-y_0}{b}, t = \frac{z-z_0}{c}$ より、

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

直線の方程式

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (a, b, c)$ に平行な直線の方程式

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (abc \neq 0)$$

《注》 $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ のときは、 $x = x_0, t = \frac{y-y_0}{b}, t = \frac{z-z_0}{c}$ より、

$$x = x_0, \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

また、 $a = 0, b = 0, c \neq 0$ のときは、 $x = x_0, y = y_0, t = \frac{z-z_0}{c}$ より、

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

この場合、「 z は任意」となりますが、この記述は省略します。なお、 $x = x_0$ は x 軸に垂直な平面の方程式、 $y = y_0$ は y 軸に垂直な平面の方程式を表します。この 2 つの方程式の連立として表されるということから、この直線は、平面 $x = x_0$ と平面 $y = y_0$ の交線ということの意味します。

例題 2 2 直線 $l: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-6, m: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-9}{4}$ の交点を求めよ。

解 $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-6 = t, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-9}{4} = s$ とおくと、

$$x = 3t, \quad y = -2t - 1, \quad z = t + 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2s - 1, \quad y = -3s - 2, \quad z = 4s + 9 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②の方程式をすべて満たす x, y, z が l と m の交点の座標を表すので、

$$3t = 2s - 1 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad -2t - 1 = -3s - 2 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad t + 6 = 4s + 9 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③④より、 $s = t = -1$ となり、この値を⑤の両辺に代入すると、

$$-1 + 6 = 4 \times (-1) + 9$$

よって、⑤は成立し、このとき①より、 $x = -3, y = 1, z = 5$ である。

すなわち、2 直線 l, m の交点の座標は $(-3, 1, 5)$ となる。

問題 1

直線 $l: \frac{x-2}{2} = y = -z - 2$ に原点 O から下ろした垂線の足 P の座標を求めよ。

問題 2

2 直線 $l: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$, $m: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} = 1 - z$ は、ねじれの位置にあることを示せ。

第 1 講 直線の方程式

問題 1

$\frac{x-2}{2} = y = -z-2 = t$ とおくと、直線 l 上の点 $P(x, y, z)$ は、

$$x = 2t + 2, \quad y = t, \quad z = -t - 2$$

よって、 $\vec{OP} = (2t + 2, t, -t - 2)$

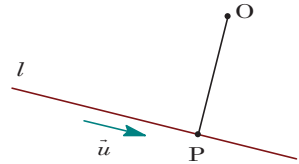
また、 l の方向ベクトルは $\vec{u} = (2, 1, -1)$ であり、 OP と

直線 l は直交するので、 $\vec{u} \cdot \vec{OP} = 0$ から、

$$2(2t + 2) + t - (-t - 2) = 0, \quad 6t + 6 = 0$$

これより $t = -1$ となり、このとき $x = 0, y = -1, z = -1$ である。

よって、垂線の足 P の座標は $(0, -1, -1)$ となる。



問題 2

まず、2 直線 l と m が交わると仮定する。

$l: \frac{x+2}{3} = y-1 = \frac{z-1}{-2} = t$ とおくと、

$$x = 3t - 2, \quad y = t + 1, \quad z = -2t + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$m: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} = 1-z = s$ とおくと、

$$x = 2s + 4, \quad y = 3s - 1, \quad z = -s + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を満たす x, y, z が存在して、

$$3t - 2 = 2s + 4 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad t + 1 = 3s - 1 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad -2t + 1 = -s + 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}\textcircled{5}$ より $t = \frac{2}{5}, s = \frac{4}{5}$ となるが、この値は $\textcircled{3}$ を満たさない。

よって、 $\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5}$ を満たす t, s は存在しない。すなわち、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を満たす x, y, z は存在せず、2 直線 l と m は交わらない。

次に、直線 l, m の方向ベクトルを、それぞれ \vec{u}, \vec{v} とすると、

$$\vec{u} = (3, 1, -2), \quad \vec{v} = (2, 3, -1)$$

すると、 $\vec{u} = k\vec{v}$ となる実数 k が存在しないので、 \vec{u} と \vec{v} は平行でない。すなわち、2 直線 l と m は平行でない。

以上より、直線 l と m は交わらず、また平行でもないので、この 2 直線はねじれの位置にある。

