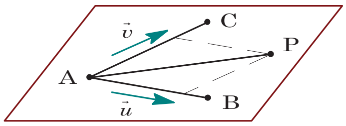
第 2 講　平面の方程式



平面は，異なる 3 点によって決定されます。この 3 点を A, B, C とし，平面 ABC に含まれる任意の点を P とおきます。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （t', s' は実数）

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （t', s' は実数）

ここで，直線 AB, AC に平行なベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$) とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は互いに平行でなく，$\vec{u}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の実数倍，$\vec{v}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の実数倍なので，$t'\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\vec{u}$，$s'\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\vec{v}$ とおくことができ，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u} + s\vec{v}$ （t, s は実数）

と表すことができます。

平面のパラメータ表示

点 A を通り，互いに平行でない 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ を含む平面

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u} + s\vec{v}$ （t, s は実数）

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u} = (a',\ b',\ c')$，$\vec{v} = (d',\ e',\ f')$ とおくと，

$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(a',\ b',\ c') + s(d',\ e',\ f')$ （t, s は実数）

《注》パラメータ t, s を消去して x, y, z の関係を求めると，次式が得られます。

$$(b'f' - c'e')(x - x_0) + (c'd' - a'f')(y - y_0) + (a'e' - b'd')(z - z_0) = 0$$

例題 3　$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$ とするとき，点 A から平面 OPQ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

解　点 H は平面 OPQ 上の点より，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t(2\sqrt{2},\ 0,\ 0) + s(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1) = (2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s - 1)$ となる。

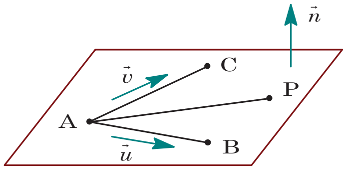
直線 AH は平面 OPQ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ より，

$2\sqrt{2}(2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s) = 0$，$2t + s = 0$ ………①

$\sqrt{2}(2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}s + (s - 1) = 0$，$4t + 8s - 1 = 0$ ………②

①②より，$s = \dfrac{1}{6}$，$t = -\dfrac{1}{12}$ となるので，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$ である。

次に，点Aを通り，$\vec{u}$，$\vec{v}$を含む平面に対して，垂直なベクトルを$\vec{n}$ $(\vec{n}\neq\vec{0})$とすると，



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{n}\cdot(\overrightarrow{OA}+t\vec{u}+s\vec{v})$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}+t\vec{n}\cdot\vec{u}+s\vec{n}\cdot\vec{v}$$

となります。この$\vec{n}$を平面ABCの法線ベクトルといいます。

ここで，$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$から，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}，\ \vec{n}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=0$$

$P(x,\ y,\ z)$，$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

展開してまとめると，一般的に，$ax+by+cz+d=0$と表せます。

平面の方程式

点$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$を通り，ベクトル$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$に垂直な平面の方程式

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

《注》パラメータt, sを消去して導いた方程式と比較すると，

$$a=b'f'-c'e'，\ b=c'd'-a'f'，\ c=a'e'-b'd'$$

数学Cの範囲になりますが，行列Aの行列式を$\det A$としたとき，

$$a=\det\begin{pmatrix}b' & e'\\ c' & f'\end{pmatrix}，\ b=\det\begin{pmatrix}c' & f'\\ a' & d'\end{pmatrix}，\ c=\det\begin{pmatrix}a' & d'\\ b' & e'\end{pmatrix}$$

と表すことができます。

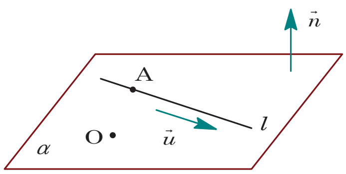
例題4　原点Oと直線$l:\dfrac{x+1}{-3}=1-y=\dfrac{z-4}{2}$を含む平面$\alpha$の方程式を求めよ。

解　lは$A(-1,\ 1,\ 4)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(-3,\ -1,\ 2)$の直線である。

平面αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=0$より，

$$-3a-b+2c=0\cdots\cdots①，\ -a+b+4c=0\cdots\cdots②$$

①②より，$a=\dfrac{3}{2}c$，$b=-\dfrac{5}{2}c$となり，



$$\vec{n}=\left(\frac{3}{2}c,\ -\frac{5}{2}c,\ c\right)=\frac{c}{2}(3,\ -5,\ 2)$$

よって，平面αの方程式は，

$$3(x-0)-5(y-0)+2(z-0)=0$$
$$3x-5y+2z=0$$

問題 3

平面 $\alpha : 2x+3y-z-4=0$ と平面 $\beta : 4x-y+2z-3=0$ の交線，および点 $(2,\ 1,\ -1)$ を含む平面 γ の方程式を求めよ。

問題 4

点 A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離を h とすると，

$$h=\frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であることを示せ。

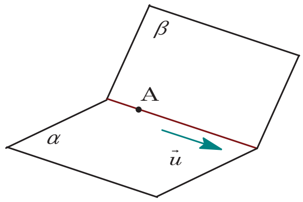
第 2 講　平面の方程式

問題 3

$\alpha : 2x+3y-z-4=0$ ……①，$\beta : 4x-y+2z-3=0$ ……②に対して，

まず，z を消去すると，$8x+5y-11=0$

$$x=\frac{5y-11}{-8} \cdots\cdots\cdots ③$$



また，y を消去すると，$14x+5z-13=0$

$$x=\frac{5z-13}{-14} \cdots\cdots\cdots ④$$

よって，平面α と平面β の交線は，③④より，

$$x=\frac{5y-11}{-8}=\frac{5z-13}{-14},\quad \frac{x}{5}=\frac{y-\frac{11}{5}}{-8}=\frac{z-\frac{13}{5}}{-14}$$

すなわち，この交線は点 $A\left(0,\ \frac{11}{5},\ \frac{13}{5}\right)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(5,\ -8,\ -14)$ の直線となる。

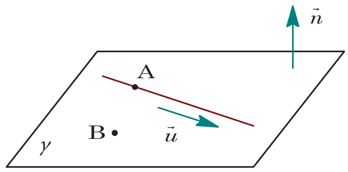
ここで，$B(2,\ 1,\ -1)$とすると，$\overrightarrow{AB}=\left(2,\ -\frac{6}{5},\ -\frac{18}{5}\right)=\frac{2}{5}(5,\ -3,\ -9)$

さて，平面γ の法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$より，

$$5a-8b-14c=0 \cdots\cdots ⑤,\quad 5a-3b-9c=0 \cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$b=-c$，$a=\frac{6}{5}c$ となり，

$$\vec{n}=\left(\frac{6}{5}c,\ -c,\ c\right)=-\frac{c}{5}(-6,\ 5,\ -5)$$



よって，平面γ の方程式は，

$$-6(x-2)+5(y-1)-5(z+1)=0$$

$$-6x+5y-5z+2=0$$

《注》次のような解法もあります。

まず，平面β は点$(2,\ 1,\ -1)$を含まないので，2 平面α，β の交線を含む平面は，k を定数として，

$$2x+3y-z-4+k(4x-y+2z-3)=0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

(*)が点$(2,\ 1,\ -1)$を含むので，

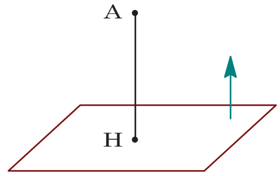
$$2\times2+3\times1-(-1)-4+k\{4\times2-1+2\times(-1)-3\}=0$$

よって，$4+2k=0$ より $k=-2$ となり，(*)に代入すると，平面γ の方程式は，

$$2x+3y-z-4-2(4x-y+2z-3)=0,\quad -6x+5y-5z+2=0$$

問題 4

点 A (x_0, y_0, z_0) を通り，平面 $ax+by+cz+d=0$ ……①に垂直な直線は，その方向ベクトルの成分を (a, b, c) とすることができるので，



$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+t(a, b, c) \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入して，

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$

$$(a^2+b^2+c^2)t+ax_0+by_0+cz_0+d=0,$$

よって，$t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$ となり，この値を $t=t_0$ とおく。

すると，垂線の足は H $(x_0+at_0, y_0+bt_0, z_0+ct_0)$ と表すことができ，

$$h=\mathrm{AH}=\sqrt{(x_0+at_0-x_0)^2+(y_0+bt_0-y_0)^2+(z_0+ct_0-z_0)^2}$$

$$=\sqrt{t_0^{\,2}(a^2+b^2+c^2)}=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|-(ax_0+by_0+cz_0+d)|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

《注》上の式は「点と平面の距離」の公式と呼ばれています。