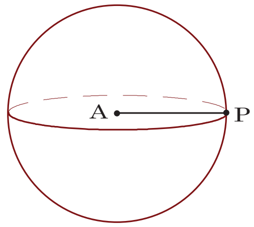
第 3 講　球面と円の方程式



球面は，定点からの距離が一定の図形です。定点(中心)を A，一定の距離(半径)を r とし，球面上の任意の点を P とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = r$ となります。

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}| = r\,,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = r^2$$

さて，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とおくと，

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

展開してまとめると，一般的に，$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ と表せます。

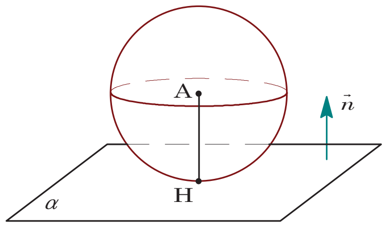
球面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を中心とし，半径 r の球面の方程式

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

例題 5　点 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ -4)$ を中心とし，平面 $\alpha : 3x + 2y - z - 1 = 0$ に接する球面の方程式を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　点 A を通り，平面 $\alpha : 3x + 2y - z - 1 = 0$ ……①に下ろした垂線は，その方向ベクトルを α の法線ベクトル $\vec{n}$ から流用して，



$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = -(z+4) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$x = 3t + 2\,,\ y = 2t - 1\,,\ z = -t - 4$

①から，$3(3t+2) + 2(2t-1) - (-t-4) - 1 = 0$

$$14t + 7 = 0\,,\ t = -\frac{1}{2}$$

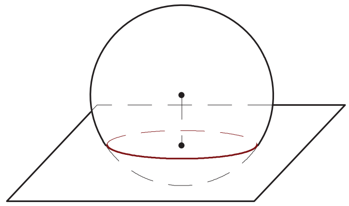
よって，$x = \dfrac{1}{2}$，$y = -2$，$z = -\dfrac{7}{2}$ から，接点 H は $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{2},\ -2,\ -\dfrac{7}{2}\right)$ となる。

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + (-2+1)^2 + \left(-\frac{7}{2} + 4\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

求める球面の方程式は，$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = \dfrac{7}{2}$

《注》球面の半径を，点 A と平面 α の距離として，公式を用いると，

$$h = \frac{|3 \times 2 + 2 \times (-1) - (-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$



空間内の円は，一般的に，球面と平面の交線として表します。

すなわち，球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，平面の方程式を

$$px+qy+rz+s=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

このとき，連立方程式①かつ②として，円を表現するわけです。

円の方程式

球面と平面の交線としての円の方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ px+qy+rz+s=0 \end{cases}$$

《注》空間内の円は「球面と平面の交線」として表す以外にも，多様な表現形式があります。たとえば「球面と球面の交線」という扱い方もあります。

例題 6　球面 $S : x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z=22$ と平面 $\alpha : x-2y-4z=4$ が交わってできる円の中心と半径を求めよ。

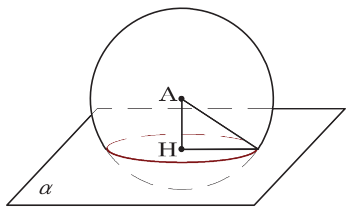
解　$S : x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z=22$ より，

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$$

これから，S は中心 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 3)$，半径 6 の球面である。

また，中心 A から平面 $\alpha : x-2y-4z=4 \cdots\cdots ①$へ下ろした垂線は，

$$x+1=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-4} \cdots\cdots\cdots ②$$



②より，$x=t-1$，$y=-2t+2$，$z=-4t+3$

①に代入すると，

$$t-1-2(-2t+2)-4(-4t+3)=4$$

よって，$t=1$ より，$x=0$，$y=0$，$z=-1$

垂線の足が，交わりの円の中心 $\mathrm{H}(0,\ 0,\ -1)$ となり，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(3+1)^2}=\sqrt{21}$$

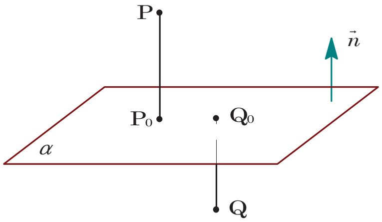
また，円の半径 r は，球面 S の半径が 6 より，

$$r=\sqrt{6^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{36-21}=\sqrt{15}$$

《注》平面は空間を 2 つの領域に分けます。ここで，空間内の点と平面との位置関係について調べます。

まず，平面αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とし，その方程式を

$$f(x,\ y,\ z)=ax+by+cz+d=0$$



ここで，右図のように，平面αに関して，点$P(p,\ q,\ r)$が$\vec{n}$の向きと同じ側にあり，点$Q(p',\ q',\ r')$が反対側にあるとします。このとき，点 P，Q から平面αに下ろした垂線の足を，それぞれ$P_0(p_0,\ q_0,\ r_0)$，$Q_0(p_0',\ q_0',\ r_0')$とおくと，

$$\overrightarrow{P_0P}=k\vec{n}\quad(k>0)\cdots\cdots\text{①},\quad \overrightarrow{Q_0Q}=l\vec{n}\quad(l<0)\cdots\cdots\text{②}$$

さて，①より，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+k\vec{n}$なので，$(p,\ q,\ r)=(p_0,\ q_0,\ r_0)+k(a,\ b,\ c)$

このとき，$ap_0+bq_0+cr_0+d=0$であることに注意して，

$$\begin{aligned}f(p,\ q,\ r)&=ap+bq+cr+d=a(p_0+ka)+b(q_0+kb)+c(r_0+kc)+d\\&=k(a^2+b^2+c^2)>0\quad(k>0)\end{aligned}$$

②より，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ_0}+l\vec{n}$なので，$(p',\ q',\ r')=(p_0',\ q_0',\ r_0')+l(a,\ b,\ c)$

このとき，$ap_0'+bq_0'+cr_0'+d=0$であることに注意して，

$$\begin{aligned}f(p',\ q',\ r')&=ap'+bq'+cr'+d=a(p_0'+la)+b(q_0'+lb)+c(r_0'+lc)+d\\&=l(a^2+b^2+c^2)<0\quad(l<0)\end{aligned}$$

このように，$f(x,\ y,\ z)$の符号によって，点と平面の位置関係が把握できます。

さて，この点に注目すると，例題 6 の解は次のようになります。

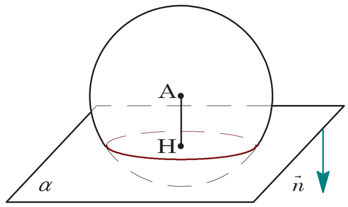
球面Sは，中心$A(-1,\ 2,\ 3)$，半径 6 の球面であり，点 A と平面αの距離は，

$$h=\frac{|-1-2\times2-4\times3-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\sqrt{21}$$

三平方の定理を用いると，円の半径rは$r=\sqrt{6^2-h^2}=\sqrt{15}$である。

ここで，$f(x,\ y,\ z)=x-2y-4z-4$とおくとき，

$$f(-1,\ 2,\ 3)=-1-2\times2-4\times3-4=-21<0$$



これより，右図のように，$\overrightarrow{HA}$と$\vec{n}$は逆向き，すなわち$\overrightarrow{AH}$と$\vec{n}$は同じ向きになる。$\vec{n}$と同じ向きの単位ベクトルは，$|\vec{n}|=\sqrt{21}$から$\dfrac{1}{\sqrt{21}}\vec{n}$となり，

$$\overrightarrow{AH}=h\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}\vec{n}=\vec{n}$$

よって，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\vec{n}=(-1,\ 2,\ 3)+(1,\ -2,\ -4)=(0,\ 0,\ -1)$

問題 5

球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上の点 $\mathrm{A}(x_0, \ y_0, \ z_0)$ における接平面の方程式は，$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$ であることを示せ。

問題 6

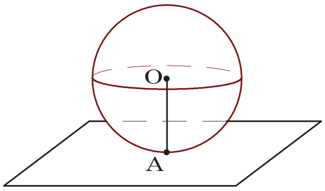
球面 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と球面 $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 1 = 0$ は，交わることを示せ。また，交わりの円の面積を求めよ。

Back　　Next

第 3 講　球面と円の方程式

問題 5

球面 $S : x^2+y^2+z^2=r^2$ ……①の中心は原点 O より，接平面の法線ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とすることができる。



すると，点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式は，

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$

$$x_0x+y_0y+z_0z={x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，点 A は球面 S 上にあるので，

$${x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=r^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，②③より，$x_0x+y_0y+z_0z=r^2$

問題 6

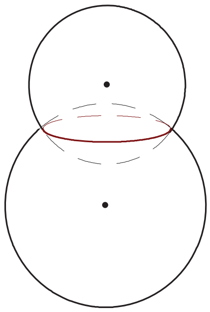
$S_1 : x^2+y^2+z^2=1$ ……①は，中心が原点 O，半径 1 の球面である。

また，$S_2 : x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+1=0$ ……②から，

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$$

すると，S_2 は，中心が $(1,\ -2,\ 2)$，半径 $2\sqrt{2}$ の球面である。

ここで，2 つの球面 S_1，S_2 の中心間距離を d とすると，



$$d=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$$

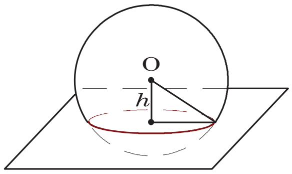
よって，$2\sqrt{2}-1<d<2\sqrt{2}+1$ より，S_1 と S_2 は交わる。

さて，S_1 と S_2 の交わりの円は，連立方程式①かつ②で表される。

ここで，①と②の両辺の差をとって，

$$-2x+4y-4z+2=0,\ x-2y+2z-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

連立方程式①かつ②と，連立方程式①かつ③は同値なので，③は S_1 と S_2 の交わりの円を含む平面を表している。



ここで，S_1 の中心 O と平面③の距離を h とすると，

$$h=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

交線の円の半径を r とすると，$r=\sqrt{1^2-h^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となる。

よって，この円の面積は，$\pi r^2=\dfrac{8}{9}\pi$ である。