

## 第4講 円柱面と円錐面の方程式

座標軸を中心軸とする直円柱面の方程式を考えます。このとき、中心軸に垂直な切り口は、底面と同じ半径の円になります。

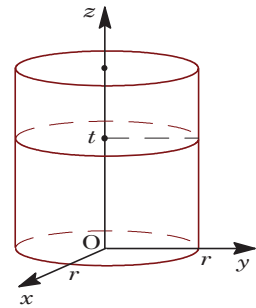
ここで、 $z$  軸を中心軸とし、底面の円の半径が  $r$  の円柱について、その円柱面の方程式を立てます。

平面  $z = t$  でこの円柱を切断したとき、その切り口の円は、この平面と点  $(0, 0, t)$  を中心とする半径  $r$  の球面の交線として表されます。

$$x^2 + y^2 + (z - t)^2 = r^2, \quad z = t$$

パラメータ  $t$  を消去すると、この円柱面の方程式は、

$$x^2 + y^2 = r^2$$



### 円柱面の方程式

原点を中心とする半径  $r$  の円を底面とし、 $z$  軸を中心軸とする円柱面の方程式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

《注》「 $z$  は任意」という記述は省略されています。

**例題7** 断面が半径1の円である直円柱が2つある。1つは中心軸が  $x$  軸、もう1つは中心軸が  $y$  軸になるように配置されている。この2つの円柱の共通部分を  $z$  軸に垂直な平面で切断すると、その切り口は正方形であることを示せ。

**角解** 中心軸が  $x$  軸,  $y$  軸の直円柱は、それぞれ、

$$y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

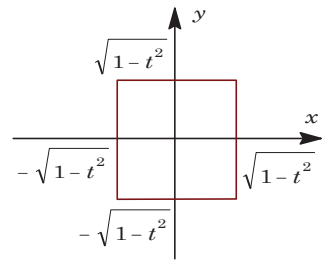
円柱の共通部分は、連立方程式①かつ②で表される。

この部分を、 $z$  軸に垂直な平面  $z = t \cdots \cdots \textcircled{3}$  で切断する。ただし、 $-1 < t < 1$  とする。

$$\textcircled{3} \text{を} \textcircled{1} \textcircled{2} \text{に代入すると, } y^2 + t^2 = 1, \quad x^2 + t^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1-t^2}, \quad y = \pm\sqrt{1-t^2}$$

よって、平面  $z = t$  上での切り口は、1辺の長さが  $2\sqrt{1-t^2}$  の正方形である。



次に、座標軸を中心軸とする直円錐面の方程式を考えます。  
 このとき、円錐の軸に垂直な切り口は円になります。

ここで、 $z$ 軸を中心軸とし、頂点 $(0, 0, k)$ 、底面の円の半径が $r$ の円錐について、その円錐面の方程式を立てます。

平面 $z = t$ で切断したとき、その切り口の円は、この平面と点 $(0, 0, t)$ を中心とする球面との交線として表されます。

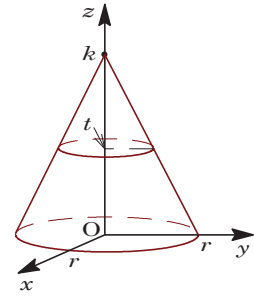
$k > 0$ のとき、この球面の半径を $r'$ とおくと、

$$r' : r = (k - t) : k, \quad r' = \frac{(k - t)r}{k}$$

すると、切り口の円の方程式は、 $x^2 + y^2 + (z - t)^2 = \frac{(k - t)^2 r^2}{k^2}, \quad z = t$

パラメータ $t$ を消去すると、この円錐面の方程式は、

$$x^2 + y^2 = \frac{(k - z)^2 r^2}{k^2}, \quad k^2(x^2 + y^2) = r^2(z - k)^2$$



### 円錐面の方程式

原点を中心とする半径 $r$ の円を底面とし、頂点 $(0, 0, k)$ の円錐面の方程式

$$k^2(x^2 + y^2) = r^2(z - k)^2$$

《注》円錐の頂点を $K(0, 0, k)$ 、円錐面上の任意の点を $P(x, y, z)$ とし、母線と中心軸のなす角を $\theta$ とおくと、

$$\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{KP} = |\overrightarrow{KO}| |\overrightarrow{KP}| \cos \theta$$

ここで、母線の長さが $\sqrt{k^2 + r^2}$ より、

$$\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}}$$

また、 $\overrightarrow{KO} = (0, 0, -k)$ 、 $\overrightarrow{KP} = (x, y, z - k)$ より、

$$-k(z - k) = k\sqrt{x^2 + y^2 + (z - k)^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}}$$

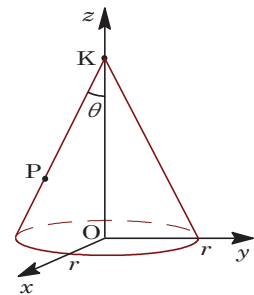
$$-(z - k)\sqrt{k^2 + r^2} = k\sqrt{x^2 + y^2 + (z - k)^2}$$

$z \leq k$ より、両辺を2乗してまとめると、

$$(z - k)^2(k^2 + r^2) = k^2\{x^2 + y^2 + (z - k)^2\}$$

$$k^2(x^2 + y^2) = r^2(z - k)^2$$

このように、内積の定義を用いて、円錐面の方程式を立式することもできます。



**例題 8** 点  $A(0, 0, 5)$  を通り、球面  $S: x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$  に接する直線全体によってできる円錐面の方程式を求めよ。

**角解** 球面  $S$  の中心を  $B(0, 0, 2)$ 、 $S$  と直線の接点を  $T$ 、母線と中心軸のなす角を  $\theta$  とおくと、

$$\cos \theta = \frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{3^2 - 1^2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ここで、円錐面上の任意の点を  $P(x, y, z)$  とすると、

$$\overline{AB} \cdot \overline{AP} = |\overline{AB}| |\overline{AP}| \cos \theta$$

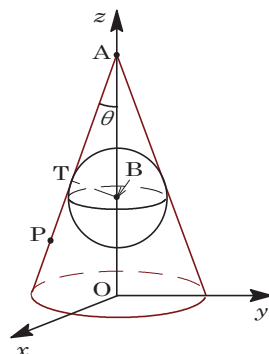
$$\overline{AB} = (0, 0, -3), \overline{AP} = (x, y, z-5) \text{ より、}$$

$$-3(z-5) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$z \leq 5$  より、両辺を 2 乗してまとめると、

$$9(z-5)^2 = 8\{x^2 + y^2 + (z-5)^2\}$$

$$8x^2 + 8y^2 = (z-5)^2$$



《注》 $z$  軸に垂直な断面が円であることに注目すると、次のようになります。

まず、母線と中心軸のなす角を  $\theta$  とおくと、

$$\tan \theta = \frac{BT}{AT} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

円錐面を平面  $z = t$  で切断すると、その切り口の円の半径は、

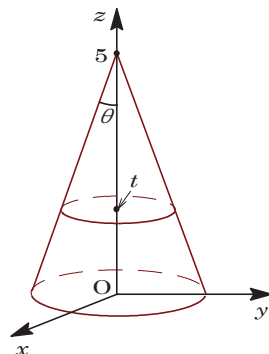
$$(5-t)\tan \theta = \frac{5-t}{2\sqrt{2}}$$

すると、この円は、点  $(0, 0, t)$  を中心とする半径  $\frac{5-t}{2\sqrt{2}}$  の球面と、平面  $z = t$  との交線として表され、

$$x^2 + y^2 + (z-t)^2 = \left(\frac{5-t}{2\sqrt{2}}\right)^2, z = t$$

パラメータ  $t$  を消去すると、この円錐面の方程式は、

$$x^2 + y^2 = \frac{(5-z)^2}{8}, 8x^2 + 8y^2 = (z-5)^2$$



### 問題 7

球面  $S : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$  を平面  $\alpha : y + z = 1$  で切断したとき、切り口にできる円を  $xy$  平面に正射影する。このとき、 $xy$  平面上の曲線の方程式を求めよ。

### 問題 8

底面の円の半径が 2、高さが 4 の直円錐が、頂点を原点  $O$  とし、中心軸が半直線  $x = 0, y = z (z \geq 0)$  になるように配置されている。この直円錐を平面  $z = 1$  で切断すると、その切り口は楕円になることを示せ。

## 第 4 講 円柱面と円錐面の方程式

### 問題 7

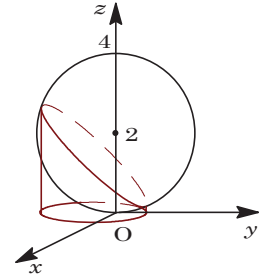
球面  $S$  と平面  $\alpha$  の交わりの円は、 $S$  と  $\alpha$  の連立方程式で表される。

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y+z=1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②を  $z=1-y$  として、①に代入すると、

$$x^2 + y^2 + (1-y-2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2y^2 + 2y = 3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$



連立方程式①かつ②と、連立方程式②かつ③は同値なので、

③は  $S$  と  $\alpha$  の交わりの円を含み、 $z$  軸に平行な立体（楕円柱面）を表す。

すると、切り口にできる円を  $xy$  平面に正射影したときに得られる曲線は、この楕円柱面と  $xy$  平面との交線として表されるので、その方程式は、

$$x^2 + 2y^2 + 2y = 3, \quad z = 0$$

### 問題 8

底面の円の中心  $A$  は半直線  $x=0, y=z (z \geq 0)$  上にあり、 $OA=4$  より、 $A(0, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  となる。

また、円錐面上の任意の点を  $P(x, y, z)$  とし、 $\angle AOP = \theta$  とおくと、

$$\tan \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ここで、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \theta$  より、

$$2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z = 4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{10}(y+z) = 4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$y+z \geq 0$  より、両辺を 2 乗してまとめると、円錐面の方程式は、

$$5(y+z)^2 = 8(x^2 + y^2 + z^2) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

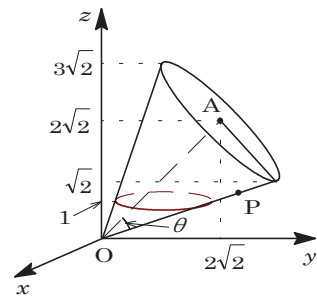
さて、平面  $z=1 \cdots \cdots \textcircled{2}$  との交わりの曲線は、連立方程式①かつ②で表される。

②を①に代入すると、 $5(y+1)^2 = 8(x^2 + y^2 + 1)$

$$8x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0, \quad \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

連立方程式①かつ②と、連立方程式②かつ③は同値より、平面  $z=1$  上での切り口は、

短軸の長さ  $2 \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 、長軸の長さ  $2 \times \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3}$  の楕円となる。



《注》 楕円の方程式

中心が原点、半径が  $a$  の円の方程式は、

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この円を  $y$  軸方向に  $\frac{b}{a}$  倍して、 $\textcircled{1}$  上の任意の点

$P(x, y)$  が点  $P'(x', y')$  に移ったとすると、

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a}y \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  より、 $x = x'$ 、 $y = \frac{a}{b}y'$  となり、 $\textcircled{1}$  に代入すると、

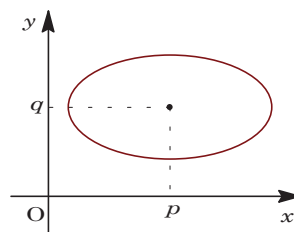
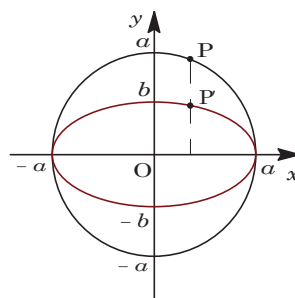
$$x'^2 + \left(\frac{a}{b}y'\right)^2 = a^2, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

よって、中心が原点、長軸の長さが  $2a$ 、短軸の長さが  $2b$  の楕円の方程式は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\textcircled{3}$  を  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動すると、中心が  $(p, q)$ 、長軸の長さが  $2a$ 、短軸の長さが  $2b$  の楕円となり、その方程式は、

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$



楕円は数学 C の範囲ですが、問題 7 と問題 8 では上記の知識も用いています。