第１講　等差数列の漸化式

イントロ　次の数列のはじめの５項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3$$

解説　$a_1=2$，$a_2=a_1+3=5$，$a_3=a_2+3=8$，$a_4=a_3+3=11$，$a_5=a_4+3=14$

これより，この数列は公差３の等差数列であり，

$$a_5=a_1+3+3+3+3=a_1+4\times3=a_1+(5-1)\times3$$

となっていることがわかる。一般化すると，次の Point 1 となる。

Point 1

$a_1=a$,　$a_{n+1}=a_n+d$ で定められた数列［等差数列］

$$a_n=a+(n-1)d$$

例題１　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3$$

解　初項２，公差３の等差数列より，一般項は，

$$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$$

練習１　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n-3$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$

イントロ　次の数列のはじめの5項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+2n$$

解説　$a_1=5$，$a_2=a_1+2\times1=7$，$a_3=a_2+2\times2=11$，$a_4=a_3+2\times3=17$，$a_5=a_4+2\times4=25$

この数列の隣接2項間の差 $a_{n+1}-a_n$ を $f(n)$ とおくと，$f(n)=2n$ であり，

$$a_5=a_1+2\times1+2\times2+2\times3+2\times4=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$

という構造をもっていることがわかる。一般化すると，次の Point 2 となる。

Point 2

$a_1=a,\ \ a_{n+1}=a_n+f(n)$ で定められた数列

$$a_n=a+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq2)$$

《注》 $f(n)=d$（d は定数）の場合は，$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}d=a+(n-1)d$ となる。

これより，Point 1 と Point 2 に共通する漸化式は，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$$

という形をもつことで特徴づけられる。

例題 2　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+2n$$

解　$n\geqq2$ で，$a_n=5+\sum_{k=1}^{n-1}2k=5+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+5$

この式は，$n=1$ でも成立する。

練習 2　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=a_n+2\cdot3^{n-1}$

(2)　$a_1=\frac{1}{2},\ \ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

問題 1

数列$\{a_n\}$を$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{3+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$によって定める。

(1) 数列$\{b_n\}$を$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義するとき，$b_{n+1}$を$b_n$で表せ。

(2) 一般項a_nを求めよ。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}$を求めよ。

問題 2

数列$\{a_n\}$が$a_1=0$, $n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n+2n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義されている。

(1) 数列$\{b_n\}$を$b_n=\dfrac{a_n}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義するとき，$b_{n+1}$を$b_n$で表せ。

(2) a_nをnで表せ。

Next

第１講　等差数列の漸化式

練習１

(1)　$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 5$

(2)　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + (n-1)\cdot 2 = 2 + 2(n-1) = 2n$ より，$a_n = \dfrac{1}{2n}$

練習２

(1)　$n \geqq 2$ で，$a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1} = 1 + 2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} = 3^{n-1}$

この式は，$n=1$ でも成立する。

(2)　$n \geqq 2$ で，$a_n = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

この式は，$n=1$ でも成立する。

問題１

(1)　$a_1 = 1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3+a_n}$ ……①より，帰納的に $a_n > 0$ となる。

①の両辺の逆数をとって，$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3+a_n}{3a_n} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{3}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ より，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{3}$ ………②

(2)　②より，$b_n = b_1 + (n-1)\cdot\dfrac{1}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}(n-1) = \dfrac{n+2}{3}$ となり，

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{3}{n+2}$$

(3)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k+2}\cdot\frac{3}{k+3} = 9\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{3n}{n+3}$

問題２

(1)　$n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n + 2n + 1$ ……①に対して，

①の両辺を $n^2(n+1)^2$ で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{a_n}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{n^2}$ より，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ ………②

(2) ②より，$n \geqq 2$ で，$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{a_1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\}$

$$= 0 + \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n^2-1}{n^2}$$

この式は，$n=1$ でも成立する。

よって，$a_n = n^2 b_n = n^2 - 1$