第 2 講　等比数列の漸化式

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n$$

解説　$a_1=3$，$a_2=a_1\times2=6$，$a_3=a_2\times2=12$，$a_4=a_3\times2=24$，$a_5=a_4\times2=48$

これより，この数列は公比 2 の等比数列であり，

$$a_5=a_1\times2\times2\times2\times2=a_1\times2^4=a_1\times2^{5-1}$$

となっていることがわかる。一般化すると，次の Point 3 となる。

Point 3

$\boldsymbol{a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n}$ **で定められた数列［等比数列］**

$$a_n=ar^{n-1}$$

例題 3　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n$$

解　初項 3，公差 2 の等比数列より，一般項は，

$$a_n=3\cdot2^{n-1}$$

練習 3　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n$

(2)　$a_1=4,\ -3a_{n+1}=a_n$

イントロ　次の数列のはじめの5項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=na_n$$

解説　$a_1=1$，$a_2=a_1\times1=1$，$a_3=a_2\times2=2$，$a_4=a_3\times3=6$，$a_5=a_4\times4=24$

この数列の隣接2項間の比$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$を$f(n)$とおくと，$f(n)=n$であり，

$$a_5=a_1\times1\times2\times3\times4=a_1\times f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$$

という構造をもっていることがわかる。一般化すると，次の Point 4 となる。

Point 4

$a_1=a,\quad a_{n+1}=f(n)a_n$ で定められた数列

$$a_n=a\cdot f(1)\cdot f(2)\cdots\cdots f(n-1)=a\prod_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq2)$$

《注》 $f(n)=r$ （r は定数）の場合は，$a_n=a\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}r=ar^{n-1}$ となる。

これより，Point 3 と Point 4 に共通する漸化式は，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}$$

という形をもつことで特徴づけられる。

例題 4　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=na_n$$

解　$n\geqq2$ で，$a_n=1\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-1)=(n-1)!$

この式は，$n=1$ でも成立する。

練習 4　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=2,\quad a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$

(2)　$a_1=1,\quad a_{n+1}=2^na_n$

問題 3

数列$\{a_n\}$は$a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+3}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義されている。

(1) $b_n=(n+2)(n+1)na_n$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(2) a_nをnを用いて表せ。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。

問題 4

数列$\{a_n\}$は，$a_1=1$，$2a_n-(n+1)a_{n+1}=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義されている。

(1) a_nをnを用いて表せ。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-2)a_k$を求めよ。

第2講　等比数列の漸化式

練習3

(1)　$a_n = 2\cdot(-2)^{n-1} = -(-2)^n$

(2)　$a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n$ より，$a_n = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

練習4

(1)　$n \geqq 2$ で，$a_n = 2\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-1} = 2n$

この式は，$n=1$ でも成立する。

(2)　$n \geqq 2$ で，$a_n = 1\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{n-1} = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$

この式は，$n=1$ でも成立する。

問題3

(1)　$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+3}a_n$ より，$(n+3)a_{n+1} = na_n$ ………①

①の両辺に $(n+2)(n+1)$ をかけると，

$$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+2)(n+1)na_n$$

$b_n = (n+2)(n+1)na_n$ より，$b_{n+1} = b_n$ ………②

(2)　②より，$b_n = b_1 = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_1 = 4$ となり，

$$a_n = \frac{b_n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

(3)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$$= 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

問題4

(1)　$2a_n - (n+1)a_{n+1} = 0$ より，$a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}a_n$

$n \geqq 2$ で，$a_n = 1\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{n} = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$

この式は，$n=1$ でも成立する。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-2)\cdot\frac{2^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{2^k}{k!}\right\} = \frac{2^0}{0!} - \frac{2^n}{n!} = 1 - \frac{2^n}{n!}$