

第3講 隣接2項間型の漸化式(1)

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。(n = 1, 2, 3, ……)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$$

解説 $a_1 = 1, a_2 = 2a_1 + 1 = 3, a_3 = 2a_2 + 1 = 7, a_4 = 2a_3 + 1 = 15,$
 $a_5 = 2a_4 + 1 = 31$

まず、階差数列は、 $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 4, a_4 - a_3 = 8, a_5 - a_4 = 16$ となり、
公比2の等比数列と予測できるので、Point 2と同じ考え方で、

$$a_5 = a_1 + (2 + 4 + 8 + 16) = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 31$$

また、 $a_1 + 1 = 2, a_2 + 1 = 4, a_3 + 1 = 8, a_4 + 1 = 16, a_5 + 1 = 32$ という規則性に
気付いたときには、数列 $\{a_n\}$ の各項に1を加えた新しい数列を設定するとよい。
つまり、 $b_n = a_n + 1$ とおき、数列 $\{b_n\}$ が公比2の等比数列と考え、

$$b_5 = 2 \cdot 2^4 = 32 \quad \text{すなわち} \quad a_5 = b_5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

計算の容易な後者の立場は、与えられた漸化式を $b_{n+1} = 2b_n$ 、言い換えると
 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ と変形することに等しく、等比型の基本タイプ

$$a_{n+1} = f(n)a_n + 0 \quad (\text{ただし } f(n) \text{ が定数の場合})$$

を目標とした式変形であることがわかる。これは、もとの漸化式の定数項+1を a_n
と a_{n+1} に振り分けているとみなすこともできる。一般化すると、Point 5になる。

Point 5

$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$)で定められた数列

式変形の目標を、 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ とし、 $b_n = a_n - \alpha$ とおくと、

$$b_{n+1} = pb_n$$

これより、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - \alpha$ 、公比 p の等比数列となる。

なお、目標の式を展開して $a_{n+1} = pa_n - p\alpha + \alpha$ とし、もとの漸化式と係数を比較
すると、 $-p\alpha + \alpha = q$ すなわち $\alpha = p\alpha + q$ より、 α の値が求まる。

【注】 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ ……①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには、
定数項 q を新たに設定した数列の漸化式では0にする必要がある。その1つの方法
として、①を満たす特殊な数列を利用するという手がある。

定数の処理ということから、これを定数数列 $a_n = \alpha$ とする。①に代入すると、

$$\alpha = p\alpha + q \quad \text{……②}$$

①、②の両辺の差をとると、目標の式 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ が得られる。

例題 5 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$$

解 $a_{n+1} = 2a_n + 1 \dots\dots$ ①を満たす 1 つの数列を $a_n = \alpha$ とおく。

①に代入して、 $\alpha = 2\alpha + 1$ より、 $\alpha = -1$ となり、

$$-1 = 2 \cdot (-1) + 1 \dots\dots$$
②

①-②より、 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

$b_n = a_n + 1$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n$ となり、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので、

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = (a_1 + 1)2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって、 $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$

《注》イントロのように $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおき、階差数列を利用すると、

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = (2a_{n+1} + 1) - (2a_n + 1) = 2(a_{n+1} - a_n) = 2b_n$$

よって、 $b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = (a_2 - a_1)2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$n \geq 2$ で、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$ ($n = 1$ のときも成立する)

また、等差型の基本タイプ

$$a_{n+1} = 1 \times a_n + f(n)$$

を目標とした式変形は次のようになるが、計算はさらに複雑になる。

①の a_n の係数 2 を新たに設定した数列の漸化式では 1 にすることを考えて、両辺を 2^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$n \geq 2$ で、 $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{a_1}{2^1} + \frac{\frac{1}{4} \{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}\} = 1 - (\frac{1}{2})^n$

この式は $n = 1$ のときも成立する。

よって、 $a_n = 2^n b_n = 2^n \{1 - (\frac{1}{2})^n\} = 2^n - 1$

練習 5 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 6, a_{n+1} = 5a_n - 4$

(2) $a_1 = 0, 2a_{n+1} - a_n - 2 = 0$

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - n$$

解説 $a_1 = 3, a_2 = 2a_1 - 1 = 5, a_3 = 2a_2 - 2 = 8, a_4 = 2a_3 - 3 = 13,$
 $a_5 = 2a_4 - 4 = 22$

まず、階差数列は、 $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, a_5 - a_4 = 9$ となるが、これだけでは規則性が予測できない。もう一度、階差数列をとるという手もあるが、ここでは Point 5 と同じように、新たに設定した数列 $\{b_n\}$ の漸化式を $b_{n+1} = 2b_n$ とすることを考える。つまり、等比型の基本タイプ

$$a_{n+1} = f(n)a_n + 0 \quad (\text{ただし } f(n) \text{ が定数の場合})$$

の形になるように、漸化式の $-n$ の項を a_n と a_{n+1} に振り分けるわけである。

さて、 $-n$ は n の1次式なので、Point 5 と異なり、1次式 $an + \beta$ を用いて振り分ける。一般的には、次の Point 6 のようになる。

Point 6

$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + qn + r$ ($p \neq 1$) で定められた数列

式変形の目標を $a_{n+1} - \{\alpha(n+1) + \beta\} = p\{a_n - (an + \beta)\}$ とし、

$b_n = a_n - (an + \beta)$ とおくと、 $b_{n+1} = pb_n$ となる。

これより、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - a - \beta$ 、公比 p の等比数列である。

なお、目標の式を展開し、もとの漸化式と係数を比較すると、

$$-p(an + \beta) + \alpha(n+1) + \beta = qn + r, \quad \alpha(n+1) + \beta = p(an + \beta) + qn + r$$

となり、この式より α, β を求める。

《注》漸化式 $a_{n+1} = pa_n + qn + r \dots\dots\dots$ ①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには、1次の項 $qn + r$ を新たに設定した数列の漸化式では0にする必要がある。その方法として、Point 5 と同じく、①を満たす特殊な数列を利用してみる。

1次式の処理ということから、これを等差数列 $a_n = an + \beta$ とする。

①に代入すると、

$$\alpha(n+1) + \beta = p(an + \beta) + qn + r \dots\dots\dots$$
②

①、②の両辺の差をとると、目標の式

$$a_{n+1} - \{\alpha(n+1) + \beta\} = p\{a_n - (an + \beta)\}$$

が得られる。

例題 6 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - n$$

解 $a_{n+1} = 2a_n - n \dots\dots$ ①を満たす 1 つの数列を $a_n = \alpha n + \beta$ とおく。

①に代入して、 $\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) - n$ より、

$$\alpha n + \alpha + \beta = (2\alpha - 1)n + 2\beta$$

すべての n に対して成り立つ条件は、 $\alpha = 2\alpha - 1, \alpha + \beta = 2\beta$

すると、 $\alpha = 1, \beta = 1$ となり、

$$(n+1) + 1 = 2(n+1) - n \dots\dots$$
②

①-②より、 $a_{n+1} - \{(n+1) + 1\} = 2\{a_n - (n+1)\}$

$b_n = a_n - (n+1)$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n$ となり、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列なので、

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = (a_1 - 1 - 1)2^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

したがって、 $a_n = b_n + (n+1) = 2^{n-1} + n + 1$

《注》イントロのように $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおき、階差数列を利用すると、

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = \{2a_{n+1} - (n+1)\} - (2a_n - n)$$

$$= 2(a_{n+1} - a_n) - 1 = 2b_n - 1 \dots\dots$$
①

これより、数列 $\{b_n\}$ の漸化式は Point 5 のタイプになっていることがわかる。

よって、①を満たす 1 つの数列を $b_n = \alpha$ とおく。

①に代入して、 $\alpha = 2\alpha - 1$ より、 $\alpha = 1$ となり、

$$1 = 2 \cdot 1 - 1 \dots\dots$$
②

①-②より、 $b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

$c_n = b_n - 1$ とおくと $c_{n+1} = 2c_n$ となり、数列 $\{c_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので、

$$c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} = (b_1 - 1)2^{n-1} = (a_2 - a_1 - 1)2^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

したがって、 $b_n = c_n + 1 = 2^{n-1} + 1$ となり、 $n \geq 2$ で、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} + 1) = 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + (n-1) = 2^{n-1} + n + 1$$

この式は、 $n = 1$ のときも成立する。

このように、簡単な漸化式にもかかわらず、かなりの計算量が必要です。

練習 6 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + n - 2$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n + 2n$

問題 5

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) $b_n = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1}$ とおいて, b_{n+1} を b_n で表せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題 6

数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定義されている。このとき, $b_n = a_n + n^2 + 2n + 3$ とおく。

- (1) b_{n+1} を b_n で表せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を利用して, 一般項 a_n を求めよ。

第3講 隣接2項間型の漸化式(1)

練習5

(1) $a_{n+1} = 5a_n - 4$ より, $a_{n+1} - 1 = 5(a_n - 1)$

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 5^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$$

よって, $a_n = 5^n + 1$

(2) $2a_{n+1} - a_n - 2 = 0$ より $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ となり, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$$a_n - 2 = (a_1 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって, $a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

練習6

(1) $a_{n+1} = 3a_n + n - 2$ より, $a_{n+1} - \left\{-\frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}\right\} = 3\left\{a_n - \left(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right)\right\}$

$$a_n - \left(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) = \left\{a_1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\right\} \cdot 3^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 3^n$$

よって, $a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$

(2) $a_{n+1} = -a_n + 2n$ より, $a_{n+1} - \left\{(n+1) - \frac{1}{2}\right\} = -\left\{a_n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right\}$

$$a_n - \left(n - \frac{1}{2}\right) = \left\{a_1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\} \cdot (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

よって, $a_n = \frac{1}{2}(-1)^{n-1} + n - \frac{1}{2}$

問題5

(1) $b_n = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1}$ より, $a_n b_n + b_n = 3a_n - 1$ となり, $a_n = \frac{-b_n - 1}{b_n - 3} \dots \dots \dots \textcircled{1}$

①を $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ に代入して,

$$\frac{-b_{n+1} - 1}{b_{n+1} - 3} = \frac{2 \cdot \frac{-b_n - 1}{b_n - 3} + 1}{3 \cdot \frac{-b_n - 1}{b_n - 3} + 4} = \frac{2(-b_n - 1) + (b_n - 3)}{3(-b_n - 1) + 4(b_n - 3)} = \frac{-b_n - 5}{b_n - 15}$$

$(-b_{n+1} - 1)(b_n - 15) = (b_{n+1} - 3)(-b_n - 5)$ より, まとめて, $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n \dots \dots \dots \textcircled{2}$

(2) ②より, $b_n = b_1 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3a_1 - 1}{a_1 + 1} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$(3) \text{ ①より, } a_n = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 3} = \frac{-1 - 5^{n-1}}{1 - 3 \cdot 5^{n-1}}$$

問題 6

$$(1) \quad b_n = a_n + n^2 + 2n + 3 \text{ より, } a_n = b_n - (n^2 + 2n + 3) \cdots \cdots \text{①}$$

①を $a_{n+1} = 2a_n + n^2$ に代入して,

$$b_{n+1} - \{(n+1)^2 + 2(n+1) + 3\} = 2\{b_n - (n^2 + 2n + 3)\} + n^2$$

まとめて, $b_{n+1} = 2b_n \cdots \cdots \text{②}$

$$(2) \quad \text{②より, } b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = (a_1 + 1^2 + 2 + 3) \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{①より, } a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$$