

第4講 隣接2項間型の漸化式(2)

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。(n = 1, 2, 3, ……)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$$

解説 $a_1 = 1, a_2 = 3a_1 + 2^1 = 5, a_3 = 3a_2 + 2^2 = 19, a_4 = 3a_3 + 2^3 = 65,$
 $a_5 = 3a_4 + 2^4 = 211$

まず、階差数列は、 $a_2 - a_1 = 4, a_3 - a_2 = 14, a_4 - a_3 = 46, a_5 - a_4 = 146$ となるが、これだけでは規則性が予測できない。ここでは Point 5 や Point 6 と同じように、新たに設定した数列 $\{b_n\}$ の漸化式を $b_{n+1} = 3b_n$ とすることを考える。つまり、

$$a_{n+1} = f(n)a_n + 0 \quad (\text{ただし } f(n) \text{ が定数の場合})$$

の形になるように、漸化式の 2^n の項を a_n と a_{n+1} に振り分けるわけである。

さて、 2^n は n の指数の式なので、Point 6 と異なり、指数の式 $\alpha \cdot 2^n$ を用いて振り分ける。一般的には、次の Point 7 のようになる。

Point 7

$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + q^n$ ($p \neq 1, p \neq q$) で定められた数列

式変形の目標を $a_{n+1} - \alpha q^{n+1} = p(a_n - \alpha q^n)$ とし、 $b_n = a_n - \alpha q^n$ とおくと、 $b_{n+1} = pb_n$ となり、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 - \alpha q$ 、公比 p の等比数列である。

なお、目標の式を展開し、もとの漸化式と係数を比較すると、

$$-p\alpha q^n + \alpha q^{n+1} = q^n, \quad \alpha q^{n+1} = p\alpha q^n + q^n$$

となり、この式より α を求める。

《注》漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ ……①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには、指数の項 q^n を新たに設定した数列の漸化式では 0 にする必要がある。その方法として、Point 6 と同じく、①を満たす特殊な数列を利用してみる。

指数の式の処理ということから、これを等比数列 $a_n = \alpha q^n$ とする。

①に代入すると、

$$\alpha q^{n+1} = p\alpha q^n + q^n \dots\dots\dots ②$$

①、②の両辺の差をとると、目標の式

$$a_{n+1} - \alpha q^{n+1} = p(a_n - \alpha q^n)$$

が得られる。

例題 7 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$$

解 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n \dots\dots$ ①を満たす 1 つの数列を $a_n = \alpha \cdot 2^n$ とおく。

①に代入して、 $\alpha \cdot 2^{n+1} = 3\alpha \cdot 2^n + 2^n$ より、 $2\alpha = 3\alpha + 1$

すると、 $\alpha = -1$ となり、

$$-2^{n+1} = -3 \cdot 2^n + 2^n \dots\dots$$
②

①-②より、 $a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$

$b_n = a_n + 2^n$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n$ となり、数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので、

$$b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} = (a_1 + 2^1)3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

したがって、 $a_n = b_n - 2^n = 3^n - 2^n$

《注》等差型の基本タイプ

$$a_{n+1} = 1 \times a_n + f(n)$$

を目標とした式変形が誘導として与えられることがあるが、計算は複雑である。

①の a_n の係数 3 を新たに設定した数列の漸化式では 1 にすることを考え、例題 5 の《注》と同様にして、両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とおくと、} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$n \geq 2 \text{ で、} \quad b_n = b_1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k = \frac{a_1}{3^1} + \frac{\frac{2}{9} \{1 - (\frac{2}{3})^{n-1}\}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \{1 - (\frac{2}{3})^{n-1}\} = 1 - (\frac{2}{3})^n$$

この式は $n = 1$ のときも成立する。

$$\text{よって、} \quad a_n = 3^n b_n = 3^n \{1 - (\frac{2}{3})^n\} = 3^n - 2^n$$

また、両辺を 2^{n+1} で割るという誘導もあるが、計算はさらに複雑になる。

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = \frac{3}{2} b_n + \frac{1}{2}$ となり、漸化式は Point 5 のタイプになる。

練習 7 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 5^n$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n + 2^{n+1}$

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。(n = 1, 2, 3, ……)

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$$

解説 $a_1 = 3, a_2 = 3a_1 + 3^2 = 18, a_3 = 3a_2 + 3^3 = 81, a_4 = 3a_3 + 3^4 = 324,$
 $a_5 = 3a_4 + 3^5 = 1215$

まず、階差数列をとっても規則性は予測できないので、Point 7と同様に考え、漸化式の 3^{n+1} の項を a_n と a_{n+1} に振り分けることを考える。つまり、式変形の目標を $a_{n+1} - \alpha \cdot 3^{n+1} = 3(a_n - \alpha \cdot 3^n)$ と設定する。

ところが、この目標の式を展開すると、

$$a_{n+1} = 3a_n - 3\alpha \cdot 3^n + \alpha \cdot 3^{n+1} = 3a_n - \alpha \cdot 3^{n+1} + \alpha \cdot 3^{n+1} = 3a_n$$

となってしまう、定数 α は存在しない。言い換えると、等比型の基本タイプ

$$a_{n+1} = f(n)a_n + 0 \quad (\text{ただし } f(n) \text{ が定数の場合})$$

には変形できないというわけである。

そこで、式変形の目標を、もう1つのタイプである等差型の基本タイプ

$$a_{n+1} = 1 \times a_n + f(n)$$

に変えてみる。例題5や例題7の《注》で記したように、 a_n の係数3に注目し、漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + 1$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n + 1$ となり、数列 $\{b_n\}$ は公差1の等差数列である。

一般化すると、次のPoint 8のようになる。

Point 8

$a_1 = a, a_{n+1} = pa_n + p^n$ ($p \neq 1$)で定められた数列

$$\text{両辺} \div p^{n+1} \text{ より, } \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p}$$

$b_n = \frac{a_n}{p^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{p}$ となり、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1}{p}$ 、公差 $\frac{1}{p}$ の等差数列である。

《注》漸化式 $a_{n+1} = pa_n + p^n$ を満たす特殊な数列を $a_n = \alpha p^n$ としたとき、

$$\alpha p^{n+1} = p\alpha p^n + p^n, \quad \alpha p^{n+1} = \alpha p^{n+1} + p^n$$

となってしまう。この漸化式を満たす数列 $a_n = \alpha p^n$ は存在しないことが一般的にわかる。

例題 8 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$$

解 $a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + 1$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n + 1$ となり、数列 $\{b_n\}$ は公差 1 の等差数列である。

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 1 = \frac{a_1}{3^1} + n - 1 = 1 + n - 1 = n$$

よって、 $a_n = b_n \cdot 3^n = n \cdot 3^n$

《注》イントロで a_2 から a_5 まで計算をしたが、その過程をもう一度振り返ってみる。

$$a_1 = 1 \cdot 3$$

$$a_2 = 3a_1 + 3^2 = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 3^2 = 1 \cdot 3^2 + 3^2 = 2 \cdot 3^2$$

$$a_3 = 3a_2 + 3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3^3 = 2 \cdot 3^3 + 3^3 = 3 \cdot 3^3$$

$$a_4 = 3a_3 + 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3^3 + 3^4 = 3 \cdot 3^4 + 3^4 = 4 \cdot 3^4$$

$$a_5 = 3a_4 + 3^5 = 3 \cdot 4 \cdot 3^4 + 3^5 = 4 \cdot 3^5 + 3^5 = 5 \cdot 3^5$$

これより、一般項が $a_n = n \cdot 3^n$ であると推測できる。この点からも、推測の難しかった例題 7 の数列とは、基本的に違いがあることがわかる。

つまり、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ で定義される数列は、 $p \neq q$ の場合と $p = q$ の場合ではその性質が異なり、それが漸化式の解法にも反映しているということになる。

練習 8 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -2a_n + 3 \cdot (-2)^n$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdot 3^n$

問題 7

$a_1 = 1$, $2(n+1)a_{n+1} = na_n + (-1)^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) $b_n = na_n$ とおくと、 b_n を n の式で表せ。
- (2) a_n を n の式で表せ。

問題 8

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = -4$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 13 \cdot 2^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定められている。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと、 b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導け。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

第4講 隣接2項間型の漸化式(2)

練習7

$$(1) a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 5^n \text{ より, } a_{n+1} + 5^{n+1} = 2(a_n + 5^n)$$

$$a_n + 5^n = (a_1 + 5^1) \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{よって, } a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 5^n$$

$$(2) a_{n+1} = -2a_n + 2^{n+1} \text{ より, } a_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} = -2 \left(a_n - \frac{1}{2} \cdot 2^n \right)$$

$$a_n - \frac{1}{2} \cdot 2^n = \left(a_1 - \frac{1}{2} \cdot 2^1 \right) (-2)^{n-1} = 2 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^n$$

$$\text{よって, } a_n = -(-2)^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n = -(-2)^n + 2^{n-1}$$

練習8

$$(1) a_{n+1} = -2a_n + 3 \cdot (-2)^n \text{ より, } \frac{a_{n+1}}{(-2)^{n+1}} = \frac{a_n}{(-2)^n} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_n}{(-2)^n} = \frac{a_1}{(-2)^1} - \frac{3}{2}(n-1) = -\frac{3}{2}n + 1$$

$$\text{よって, } a_n = \left(-\frac{3}{2}n + 1 \right) (-2)^n = (3n - 2)(-2)^{n-1}$$

$$(2) a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdot 3^n \text{ より, } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{4}{3}$$

$$\text{よって, } a_n = \left(-\frac{2}{3}n + \frac{4}{3} \right) \cdot 3^n = -2(n-2) \cdot 3^{n-1}$$

問題7

$$(1) 2(n+1)a_{n+1} = na_n + (-1)^{n+1} \text{ に対して, } b_n = na_n \text{ より,}$$

$$2b_{n+1} = b_n + (-1)^{n+1}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}$$

$$\text{すると, } b_{n+1} - \frac{1}{3}(-1)^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ b_n - \frac{1}{3}(-1)^n \right\} \text{ から,}$$

$$b_n - \frac{1}{3}(-1)^n = \left\{ b_1 - \frac{1}{3}(-1)^1 \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(1 \cdot a_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって, } b_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} + \frac{1}{3}(-1)^n$$

$$(2) (1) \text{ より, } a_n = \frac{b_n}{n} = \frac{1}{3n} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} + (-1)^n \right\}$$

問題 8

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 13 \cdot 2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割って,

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 4n - 13$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ より, } b_{n+1} = b_n + 4n - 13$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (1)より, } n \geq 2 \text{ で, } b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 13) = \frac{a_1}{2^1} + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 13(n-1) \\ &= 2n^2 - 15n + 11 \end{aligned}$$

この式は, $n = 1$ でも成立する。

よって, $a_n = 2^n b_n = (2n^2 - 15n + 11) \cdot 2^n$