第 6 講　隣接 3 項間型の漸化式

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$$

解説　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=5a_2-6a_1=-1$，$a_4=5a_3-6a_2=-11$，
$a_5=5a_4-6a_3=-49$

　定数係数の隣接 3 項間型の漸化式は，新たに設定した数列の漸化式が等比型となるように式変形をする。つまり，中間の項である $5a_{n+1}$ の一部分を a_{n+2} とドッキングし，残りの部分を a_n とドッキングすると考えて，目標の式を

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

とするわけである。一般的には，次の Point 11 のようになる。

Point 11

$a_1=a$，$a_2=a'$，$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$　$(p^2-4q\neq 0)$ で定められた数列

　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ を目標の式とし，$b_n=a_{n+1}-\beta a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=\alpha b_n$$

　これより，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-\beta a_1$，公比 α の等比数列となる。

　なお，目標の式を展開すると $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ となり，もとの漸化式と係数比較すると，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ から，α，β の値が求まる。

　さらに，2 次方程式の解と係数の関係を利用すると，α，β は

$$x^2+px+q=0$$

の 2 つの解であり，$D=p^2-4q\neq 0$ のときは $\alpha\neq\beta$ となる。

《注》 漸化式を $a_{n+2}=-pa_{n+1}-qa_n$ ……①と変形し，$a_{n+1}=1\cdot a_{n+1}+0\cdot a_n$ ……②との連立式とする。Point 10 と同様に考えて，式変形の目標を①－②×k から，

$$a_{n+2}-ka_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-ka_n)\ \cdots\cdots\cdots③$$

とする。すると，③は Point 11 の目標式の β を k に替えた式に等しい。

　さらに，①②を行列を用いて表すと，$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ となる。このとき，行列 $\begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式は，$x^2-(-p+0)x+(0+q)=0$ から，

$$x^2+px+q=0$$

であり，その解 α は固有値に対応する。

このように，隣接 3 項間型の漸化式を連立漸化式と関連させて解くこともできる。

例題 11　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$$

解　2 次方程式 $x^2=5x-6$，$x^2-5x+6=0$ の解は，$x=2,\ 3$ より，

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$ から，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ と変形して，

$c_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$ から，$c_n=c_1\cdot 3^{n-1}$

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}=-3^{n-1}\cdots\cdots\cdots②$$

②−①より，$a_n=-3^{n-1}+2^n$

《注》①を $a_{n+1}=3a_n-2^n$ ……③と変形し，Point 7 と同様にして解くこともできる。

③を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha\cdot 2^n$ とおく。

③に代入して，$\alpha\cdot 2^{n+1}=3\alpha\cdot 2^n-2^n$ より，$2\alpha=3\alpha-1$

すると，$\alpha=1$ となり，

$$2^{n+1}=3\cdot 2^n+2^n\cdots\cdots\cdots④$$

③−④より，$a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$

$b_n=a_n-2^n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので，

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=(a_1-2^1)3^{n-1}=-3^{n-1}$$

したがって，$a_n=b_n+2^n=-3^{n-1}+2^n$

練習 11　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n$$

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$$

解説　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=4a_2-4a_1=12$，$a_4=4a_3-4a_2=32$，

$a_5=4a_4-4a_3=80$

Point 11 と同様にして，漸化式を $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形することを考える。そのため，2 次方程式 $x^2=4x-4$ すなわち $x^2-4x+4=0$ の解を計算する。すると，重解 $x=2$ をもつことから，$\alpha=\beta=2$ である。

Point 12

$a_1=a$，$a_2=a'$，$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$　$(p^2-4q=0)$ で定められた数列

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解は，$D=p^2-4q=0$ のとき重解であり，これを $x=\alpha$ とおく。漸化式は，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形でき，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}\quad すなわち\quad a_{n+1}=\alpha a_n+(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$$

すると, Point 8 と同様にして一般項を求めることができる。

例題 12　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$$

解　2 次方程式 $x^2=4x-4$，$x^2-4x+4=0$ の解は，$x=2$ より，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$ から，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

よって，$a_{n+1}=2a_n+2^n$ から，両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}\quad すなわち\quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$c_n=c_1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n$$

よって，$a_n=c_n\cdot 2^n=\dfrac{1}{2}n\cdot 2^n=n\cdot 2^{n-1}$

練習 12　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=-6a_{n+1}-9a_n$$

問題 11

漸化式 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_{n+1}{}^2 a_n{}^3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=\log_3 a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

問題 12

2 辺の長さが 1 と 2 の長方形と 1 辺の長さが 2 の正方形のタイルがある。縦 2，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考え，そのような並べ方の総数を a_n で表す。たとえば，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$ である。ただし，n は正の整数である。

(1)　a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を n で表せ。

Back

第 6 講　隣接 3 項間型の漸化式

練習 11

$a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n$ ……①に対して，$x^2=5x+6$，$x^2-5x-6=0$，$x=6,\ -1$

①より，$a_{n+2}-6a_{n+1}=-(a_{n+1}-6a_n)$

$$a_{n+1}-6a_n=(a_2-6a_1)(-1)^{n-1}=-5\cdot(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$a_{n+2}+a_{n+1}=6(a_{n+1}+a_n)$

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\cdot 6^{n-1}=2\cdot 6^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③－②より，$7a_n=2\cdot 6^{n-1}+5\cdot(-1)^{n-1}$，$a_n=\frac{2}{7}\cdot 6^{n-1}+\frac{5}{7}(-1)^{n-1}$

練習 12

$a_{n+2}=-6a_{n+1}-9a_n$ ……(＊)に対して，$x^2=-6x-9$，$x^2+6x+9=0$，$x=-3$

(＊)より，$a_{n+2}+3a_{n+1}=-3(a_{n+1}+3a_n)$

$$a_{n+1}+3a_n=(a_2+3a_1)(-3)^{n-1}=5\cdot(-3)^{n-1}$$

すると，$a_{n+1}=-3a_n+5\cdot(-3)^{n-1}$，$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}=\frac{a_n}{(-3)^n}+\frac{5}{9}$

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{a_1}{(-3)^1}+\frac{5}{9}(n-1)=\frac{5n-8}{9}$$

よって，$a_n=\frac{5n-8}{9}(-3)^n=(5n-8)(-3)^{n-2}$

問題 11

(1)　$a_1=1>0$，$a_2=3>0$，$a_{n+2}={a_{n+1}}^2{a_n}^3$ ……①より，帰納的に $a_n>0$ である。

①の両辺に底 3 で対数をとって，

$$\log_3 a_{n+2}=\log_3({a_{n+1}}^2{a_n}^3)=2\log_3 a_{n+1}+3\log_3 a_n$$

$b_n=\log_3 a_n$ より，$b_{n+2}=2b_{n+1}+3b_n$ ………②

ただし，$b_1=\log_3 a_1=0$，$b_2=\log_3 a_2=1$ である。

$$x^2=2x+3,\quad x^2-2x-3=0,\quad x=3,\ -1$$

②より，$b_{n+2}-3b_{n+1}=-(b_{n+1}-3b_n)$

$$b_{n+1}-3b_n=(b_2-3b_1)(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

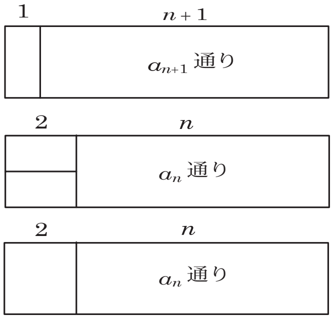
②より，$b_{n+2}+b_{n+1}=3(b_{n+1}+b_n)$

$$b_{n+1}+b_n=(b_2+b_1)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④－③より，$4b_n=3^{n-1}-(-1)^{n-1}$，$b_n=\frac{1}{4}\{3^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$

(2)　(1)より，$a_n=3^{b_n}=3^{\frac{1}{4}\{3^{n-1}-(-1)^{n-1}\}}$

問題 12



(1) 縦 2，横 $n+2$ の長方形の部屋を 2 種類のタイルで敷き詰めるのに，左端の置き方で場合分けをする。

すると，長方形のタイルを縦に置いたとき，横に置いたとき，正方形のタイルを置いたときの 3 通りのパターンがある。

したがって，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ ………①

(2) まず，$x^2=x+2$，$x^2-x-2=0$，$x=2,\ -1$

①より，$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$ ………②

①より，$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\cdot 2^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$ ………③

③−②より，$3a_n=2^{n+1}-(-1)^{n-1}$，$a_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+1}-(-1)^{n-1}\}$