**1**　　［金沢大・文］

放物線 $y=-x^2+2x$ を $H_1$，また放物線 $y=x^2$ を $H_2$ で表す。$H_1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における $H_1$ の接線を $l$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　接線 $l$ の方程式を求めよ。また，$a$ の値に関係なく，$l$ は $H_2$ と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　接線 $l$ と放物線 $H_2$ の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が $H_1$ 上を動くとき，点 Q の軌跡 $C$ の方程式を求めよ。

(3)　(2)の軌跡 $C$ と放物線 $H_1$ および $y$ 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

$a$, $b$ を正の定数とする。関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし, P の $x$ 座標は負, Q の $x$ 座標は正である。

(1)　直線 PQ の方程式を $a$ と $b$ で表せ。

(2)　P および Q の座標を $a$ と $b$ で表せ。

(3)　$\angle \mathrm{POQ} = 90^\circ$ となる $b$ が存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。ただし, O は原点である。

**3** ［名古屋大・文］

$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 $k$ に対して，$xy$ 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 $D, E, F$ を考える。

$D$ は連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq kx$ で表される領域

$E$ は連立不等式 $y \leqq x^2$，$y \geqq kx$ で表される領域

$F$ は連立不等式 $y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ で表される領域

(1)　領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする $k$ の値と，その最小値を求めよ。

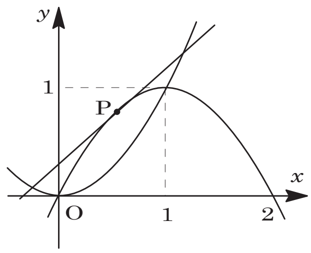
**1**　　［金沢大・文］

(1)　$H_1 : y=-x^2+2x$ より，$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における接線 $l$ の方程式は,

$$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$$

$$y=(-2a+2)x+a^2$$




ここで, $l$ と $H_2 : y=x^2$ との共有点は,

$$x^2=(-2a+2)x+a^2$$

$$x^2+2(a-1)x-a^2=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式 $D$ は，$D/4=(a-1)^2+a^2>0$

よって, $a$ の値と関係なく, $l$ は $H_2$ と異なる 2 点で交わる。

(2)　①の 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと, 2 交点は $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ と表せ,

$$\alpha+\beta=-2(a-1),\ \alpha\beta=-a^2$$

このとき, 2 交点の中点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと,

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

すると，$x=-(a-1) \cdots\cdots ②$

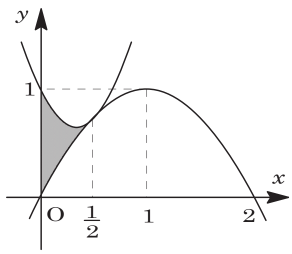
$$y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4(a-1)^2+2a^2}{2}=3a^2-4a+2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より $a=-x+1$ となり，③に代入すると，点 Q の軌跡 $C$ の方程式は,

$$y=3(-x+1)^2-4(-x+1)+2,\ y=3x^2-2x+1$$

(3)　$C$ と $H_1$ の共有点は，$3x^2-2x+1=-x^2+2x$

$$4x^2-4x+1=0,\ (2x-1)^2=0,\ x=\frac{1}{2}$$




$C$ と $H_1$ および $y$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ は,

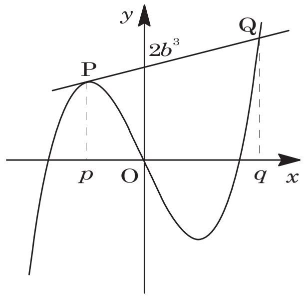
$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(3x^2-2x+1)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2dx=\frac{1}{6}\Big[(2x-1)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

## ［解 説］

$H_1$，$H_2$，$C$ という 3 種類の放物線，しかも $H_1$ の接線 $l$ が関連しているため，混乱しがちです。題意を取り違えないことが重要です。

**2**　　　　［一橋大］




(1)　曲線 $y=x^3-ax$ ……①上の点 P，Q の $x$ 座標をそれぞれ $p$，$q$ $(p<0<q)$ とし，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線を $y=mx+2b^3$ ……②とおく。

　また，条件より，点 P，Q の一方は①と②の接点，他方は交点である。

(i)　点 P が交点，点 Q が接点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は解 $x=p$ と重解 $x=q$ をもつことより，

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)(x-q)^2$$

定数項を比べると，$-2b^3=-pq^2$ となり，$b>0$，$p<0<q$ に反する。

(ii)　点 P が接点，点 Q が交点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は重解 $x=p$ と解 $x=q$ をもつことより，

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)^2(x-q)$$

係数を比べると，

$$0=2p+q\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad -a-m=p^2+2pq\ \cdots\cdots\cdots ④,\quad -2b^3=-p^2q\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③から $q=-2p$ を④，⑤に代入すると，

$$m=-a+3p^2\ \cdots\cdots\cdots ⑥,\quad p=-b\ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より $m=-a+3b^2$ となり，直線 PQ の方程式は，②より，

$$y=(-a+3b^2)x+2b^3$$

(2)　①⑦より $\mathrm{P}(-b,\ -b^3+ab)$，③から $q=2b$ なので $\mathrm{Q}(2b,\ 8b^3-2ab)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-b,\ -b^3+ab)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2b,\ 8b^3-2ab)$ である。

条件から $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ となり，

$$-2b^2+(-b^3+ab)(8b^3-2ab)=0$$

$b>0$ を用いてまとめると，$4b^4-5ab^2+a^2+1=0$

ここで，$t=b^2>0$ とおくと，$4t^2-5at+a^2+1=0$ ………⑧

すると，求める条件は，⑧が $t>0$ の解をもつ $a$ の範囲となる。

$a>0$ から，$\dfrac{5a}{4}>0$，$\dfrac{a^2+1}{4}>0$ に注意すると，

$$D=25a^2-16(a^2+1)=(3a+4)(3a-4)\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

重解条件を利用して解きました。標準的で落とせない問題です。

**3**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

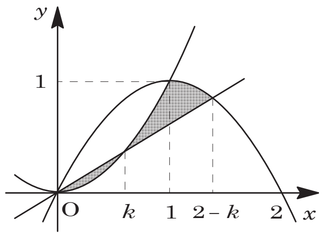
(1)　$D: y \geqq x^2,\ y \leqq kx$，$E: y \leqq x^2,\ y \geqq kx$，$F: y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③ である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$




これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$
$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$
$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2)　(1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

| $k$ | 0 | $\cdots$ | $-2+2\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m'(k)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $m(k)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を $k^2+4k-4$ で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

## ［解 説］

名大では 1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。