1　［東北大・理］

連立不等式 $x^2-6x+y^2+5 \leqq 0$, $x+y \leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また, 曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ ［名古屋大・理］

座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$，B$(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 P$(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A$'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 P$(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点 P$(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 P$(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

$\boxed{3}$ ［北海道大・理］

実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x + 3y + 2z = 1$ を満たすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x - y + z$ の値の範囲を求めよ。

4　［神戸大・文］

実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。

$\boxed{5}$ ［千葉大・理］

a, t を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1)　すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2)　$a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

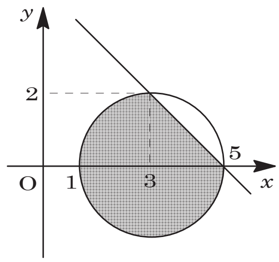
(3)　$a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[東北大・理]

領域 D： $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$， $x+y\leqq 5$ より，

$$(x-3)^2+y^2\leqq 4,\quad y\leqq -x+5$$

領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

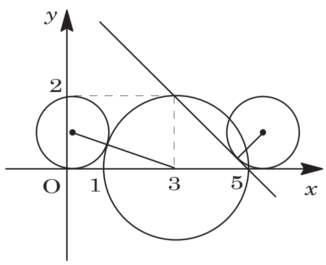


また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ に対して，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式$(*)$は，中心$(a,\ 1)$，半径 1 の円を表す。

右図より，実数 a が最大となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $x+y-5=0$ に接するときなので，



$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\quad |a-4|=\sqrt{2}$$

$a>4$ より，a の最大値は，$a=4+\sqrt{2}$ である。

また，実数 a が最小となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $(x-3)^2+y^2=4$ に接するときなので，

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\quad (a-3)^2=8$$

$a<3$ より，a の最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$ である。

[解 説]

領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

© 電送数学舎 2006

$\boxed{2}$　　　　[名古屋大・理]

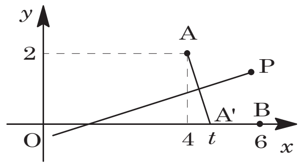
(1)　ピッタリ直線 l は，線分 AA' の垂直二等分線より，

$PA=PA'$ となり，

$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①



(2)　ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点 $A'(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

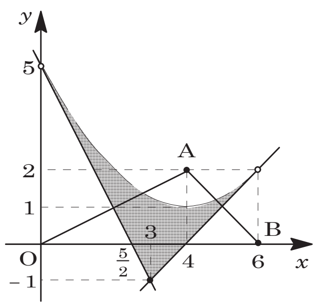
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q\geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′ と領域④′ の境界線，領域③′ と領域⑤′ の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③′ ④′ ⑤′ より，点 $P(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3)　①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$A_1'(t_1,\ 0)$，$A_2'(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA_1'}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{AA_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA_1'}\cdot\overrightarrow{AA_2'}=0$ となり，

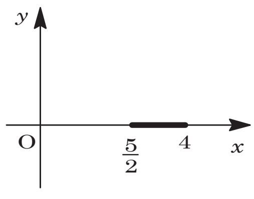
$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $P(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



[解 説]

線対称を題材にした問題です。文系の類題に，ひとひねりが加えられています。

© 電送数学舎 2006

$\boxed{3}$ ［北海道大・理］

(1) 条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1 \cdots\cdots$①, $4x+3y+2z=1 \cdots\cdots$②に対して,

②から $z=-2x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}$ となり, ①に代入すると,

$$x \leqq y \cdots\cdots ③,\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \cdots\cdots ④,\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \cdots\cdots ⑤$$

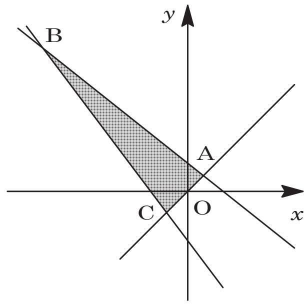
すると, ④より $y \leqq -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$, ⑤より $y \geqq -\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点をAとすると, $x=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$ から, $x=\dfrac{1}{9}$, $y=\dfrac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点をBとすると, $-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から, $x=-1$, $y=1$

③⑤の境界線の交点をCとすると, $x=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から, $x=-\dfrac{1}{7}$, $y=-\dfrac{1}{7}$

よって, ③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり, x の最大値は点Aの x 座標から $\dfrac{1}{9}$, y の最小値は点Cの y 座標より $-\dfrac{1}{7}$ である。



(2) $P=3x-y+z$ とおくと, ②より,

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより, $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}P$ となり, 傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって, 点Bを通るとき P は最小となり, 最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また, 点Cを通るとき, P は最大となり, 最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より, $-3 \leqq 3x-y+z \leqq \dfrac{5}{7}$ である。

［解 説］

(1)の問題文で示唆されているように, z を消去すれば, 領域と最大・最小の典型題となります。

© 電送数学舎 2006

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・文］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$を通る直線$l_t : y = 2tx - t^2$ ……①がただ１つである条件は，①をtの方程式としてみたとき，ただ１つの解をもつことに対応する。

①より，$t^2 - 2xt + y = 0$となり，

$$D/4 = x^2 - y = 0$$

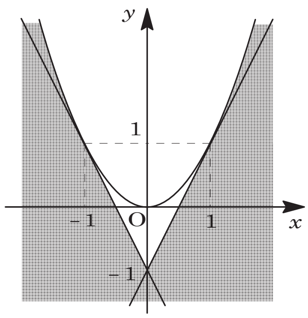
よって，点Pの軌跡の方程式は，$y = x^2$ ……②である。

(2)　①と②の共有点は，$2tx - t^2 = x^2$より，

$$(x-t)^2 = 0,\ x = t$$

これより，直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線である。

そこで，tが$|t| \geqq 1$すなわち$t \leqq -1$，$1 \leqq t$の範囲を動くとき，①において，$l_1 : y = 2x - 1$，$l_{-1} : y = -2x - 1$であることを利用すると，直線l_tの通過領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線です。このためのヒントが(1)の役割でしょうが，気付きにくい部分です。もっとも，この点を無視しても，直線②の通過領域は，有名な実数解条件として求めることができます。

© 電送数学舎 2006

5　　［千葉大・理］

(1)　$C : x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ より，

$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4$ ………①

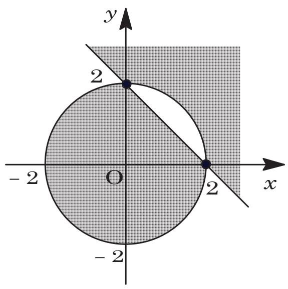
①が円を表す条件 $2t^2-at+4>0$ が，すべての t に対して成立するためには，

$D=a^2-32<0$，$-4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$

(2)　$a=4$ のとき，$C : x^2+y^2-4-t(2x+2y-4)=0$ ………②

t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過する領域は，②を t の方程式としてみたとき，$t>0$ の解をもつ条件として表される。

まず，$2x+2y-4=0$ ……③のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0$ ……④の場合だけである。ここで，③④を連立することにより $(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となり，C はこの点を通過する。



次に，$2x+2y-4\neq0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}$ となり，

$\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}>0$，$(x^2+y^2-4)(x+y-2)>0$

よって，C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし，点 $(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ 以外の境界は含まない。

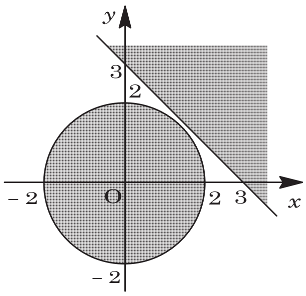
(3)　$a=6$ のとき，$C : x^2+y^2-4-t(2x+2y-6)=0$ ………⑤

⑤が円を表す条件は，(1)より $2t^2-6t+4>0$ すなわち $(t-1)(t-2)>0$ であり，$t>0$ と合わせて，$0<t<1$，$2<t$ ……(＊)となる。

まず，$2x+2y-6=0$ ……⑥のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0$ ……⑦の場合だけである。ここで，⑥より $y=-x+3$ となり，⑦に代入すると，

$x^2+(-x+3)^2-4=0$，$2x^2-6x+5=0$

しかし，$D/4=-1$ より実数解をもたず，不適である。



次に，$2x+2y-6\neq0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ となり，

(＊)より，

$0<\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}<1$ ……⑧，$2<\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ ……⑨

⑧の左側の不等式は，

$(x^2+y^2-4)(x+y-3)>0$ ………⑩

不等式⑩を図示すると，右上図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

⑧の右側の不等式は，$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)<(2x+2y-6)^2$

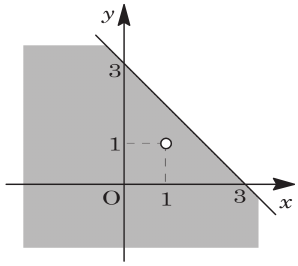
$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6)<0$

$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}<0$ ………⑪

© 電送数学舎 2006

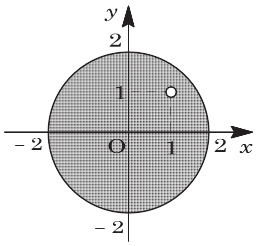
すると，$(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 0$ から，不等式⑪は，

$$(x,\ y) \neq (1,\ 1) \text{ かつ } x+y-3<0$$



よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

まとめると，不等式⑧は，不等式⑩と⑪を連立したものであるので，その共通部分を領域として図示すると，右下図の網点部となる。ただし，境界および点$(1,\ 1)$は含まない。



さらに，⑨を変形すると，

$$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)>2(2x+2y-6)^2$$

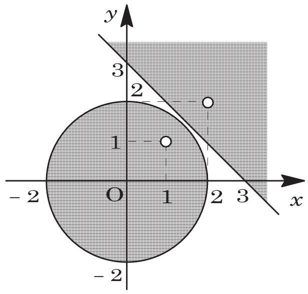
$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12)>0$$

$$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\}>0 \cdots\cdots\cdots ⑫$$

すると，$(x-2)^2+(y-2)^2 \geqq 0$ から，不等式⑫は，

$$(x,\ y) \neq (2,\ 2) \text{ かつ } x+y-3>0$$

したがって，不等式⑨は，直線 $x+y-3=0$ の上側から，点$(2,\ 2)$を除いた領域を表す。



以上より，C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので，図示すると右図の網点部となる。

ただし，境界線および 2 点$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$は含まない。

[解 説]

記述量が多い問題です。ステップを 1 つずつ踏んで図示していくだけですが，かなりの計算力と忍耐力が要求されます。

© 電送数学舎 2006