1　　［金沢大・理］

xy 平面上の円 $C : x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

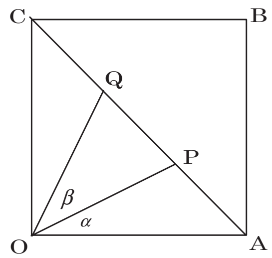
(1)　原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1, T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$, $T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　(2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

2　［広島大・理］

正方形OABCの対角線ACを3等分し，図のように，Aに近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle \mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle \mathrm{POQ}=\beta$とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を$\angle \mathrm{POR}=\alpha$となるようにとる。このとき，比AR : RCを求めよ。

$\boxed{3}$　　［東京大・文］

四角形 ABCD が，半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

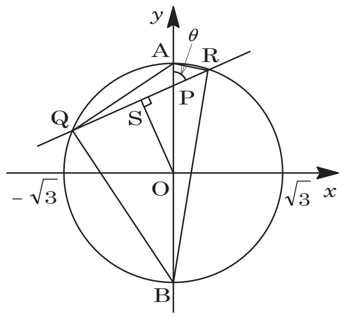
4　　［大阪大・理］

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle APB = \angle QPC$，$\angle PQC = \angle RQD$，$\angle QRD = \angle SRA$ となるようにとる。ただし，点 P, Q, R, S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。

1　　［金沢大・理］



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

また，$\mathrm{SR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OS}^2}=\sqrt{3-2\sin^2\theta}$ より，

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{SR}=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$$

(2)　$T_1=\triangle\mathrm{AQB}$，$T_2=\triangle\mathrm{ABR}$ なので，

$$T_1=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{QP}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$$
$$T_2=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PB}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$$

よって，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ は，(1)より，

$$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta=2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$$

(3)　$2\sqrt{3}<S(\theta)$ より，$1<\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ となり，$1<(3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

$$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0,\ (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sqrt{2}\sin\theta-1>0$ と同値になる。

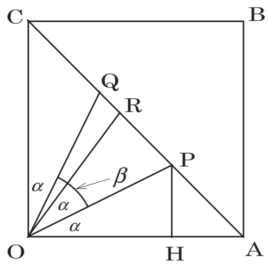
よって，$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

［解 説］

四角形の面積は，2 本の対角線の長さとそのなす角を用いて表すことができます。(1)と(2)は，この公式を誘導する設問です。

2　　　　［広島大・理］

(1)　まず，一般性を失うことなく，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$ とすることができる。



ここで，P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH}:\mathrm{HA}=\mathrm{CP}:\mathrm{PA}=2:1$ から，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

これより，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4>\sqrt{15}$ より $\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3}>8$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{4}{5}$ となるので，

$$\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5},\quad \cos\alpha>\cos\frac{\pi}{6}>\cos\beta$$

$f(x)=\cos x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少するので，$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ となる。

(3)　(1)から $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$ なので，$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

さて，$\angle\mathrm{ORA}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\dfrac{3}{4}\pi-2\alpha$ から，$\triangle\mathrm{OAR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)},\quad \mathrm{AR}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos 2\alpha-\cos\frac{3}{4}\pi\sin 2\alpha}$$

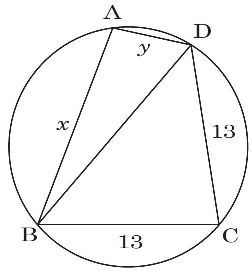
よって，$\mathrm{AR}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{8}{7\sqrt{2}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{2}$

これより，$\mathrm{RC}=\sqrt{2}-\dfrac{4}{7}\sqrt{2}=\dfrac{3}{7}\sqrt{2}$ となり，$\mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$ である。

［解 説］

ベクトルを利用した設定で，文系に類題が出ていますが，理系ではこの誘導はありません。しかし，そのために逆に発想が制約されませんでした。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］



△BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C}=2\times\frac{65}{8},\quad \mathrm{BD}=\frac{65}{4}\sin C\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=13^2+13^2-2\cdot 13^2\cos C\\&=2\cdot 13^2(1-\cos C)\ \cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①②より，$\dfrac{65^2}{4^2}\sin^2 C=2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$$5^2\cdot 13^2(1+\cos C)(1-\cos C)=2\cdot 13^2\cdot 4^2(1-\cos C)$$

$1-\cos C>0$ より，$25(1+\cos C)=32$，$\cos C=\dfrac{7}{25}$ ………③

②より，$\mathrm{BD}^2=2\times 13^2\times\dfrac{18}{25}$，$\mathrm{BD}=\dfrac{6\times 13}{5}=\dfrac{78}{5}$

ここで，$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，条件より，

$$x+y=44-13\times 2,\quad x+y=18\ \cdots\cdots\cdots④$$

△ABD に余弦定理を適用して，$\dfrac{78^2}{25}=x^2+y^2-2xy\cos(180°-C)$

$$\frac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-2xy+2xy\cos C$$

③より，$\dfrac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-\dfrac{36}{25}xy$，$6^2\times 13^2=25(x+y)^2-36xy$ ………⑤

④⑤より，$36xy=-6^2\times 13^2+5^2\times 18^2$，$36xy=(78+90)(-78+90)$

$$xy=\frac{168\times 12}{36}=56\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑥より，x, y は方程式 $t^2-18t+56=0$ の 2 つの解となるので，

$$(t-4)(t-14)=0,\quad t=4,\ 14$$

よって，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA})=(4,\ 14),\ (14,\ 4)$

［解 説］

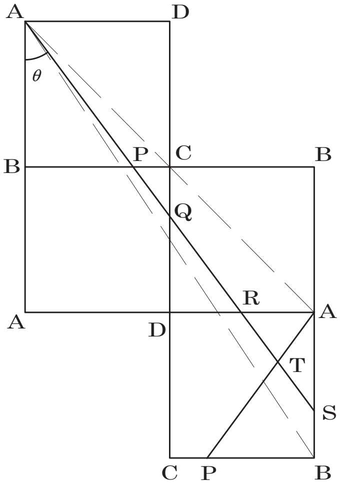
センター試験でよく見かける構図の問題ですが，いろいろな考え方が浮かび，方針の決めにくい良問です。また，計算にも工夫が必要です。

4　［大阪大・理］

(1)　右図のように，正方形 ABCD を辺 BC，CD，DA に関して，順に折り返していく。すると，条件より，折れ線 APQRS は 1 本の直線になる。

さて，点 S が辺 AB 上にあるとき，点 P, Q, R は，それぞれ辺 BC, CD, DA 上に存在する。

ここで，点 S が点 A と一致するとき $BP=1$，点 S が点 B と一致するとき $BP=\dfrac{2}{3}$ となり，求める条件は，$BP=t$ から $\dfrac{2}{3}<t<1$ である。



(2)　まず，$\angle BAP=\theta$ とおくと，$\tan\theta=t$ となる。

そこで，$\angle CQP=\angle DQR=\angle ASR=\theta$ から，

$$CP=1-t,\ CQ=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$DQ=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t},\ DR=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1,\ AR=1-(2t-1)=2-2t$$

これより，$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot t=\dfrac{t}{2}$，$\triangle PCQ=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{(1-t)^2}{2t}$

$$\triangle QDR=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また，RS と AP の交点を T とするとき，$\angle TAS=\angle TSA=\theta$ から，$\triangle TAS$ は二等辺三角形となり，T から AR への垂線の長さは，AS の $\dfrac{1}{2}$ であるので，

$$AS=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t},\ \triangle RAT=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

したがって，四角形 PQRT の面積 $f(t)$ は，

$$f(t)=1-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2t}-\frac{(2t-1)^2}{2t}-\frac{(1-t)^2}{t}=1-\frac{t^2+3(1-t)^2+(2t-1)^2}{2t}$$

$$=1-\frac{4t^2-5t+2}{t}=\frac{-4t^2+6t-2}{t}=6-\left(4t+\frac{2}{t}\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$4t+\dfrac{2}{t}\geqq2\sqrt{4t\cdot\dfrac{2}{t}}=4\sqrt{2}$

等号成立は $4t=\dfrac{2}{t}$ のときであり，$\dfrac{2}{3}<t<1$ から $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の場合となる。

以上より，$f(t)$ の最大値は $6-4\sqrt{2}$ である。

［解 説］

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお，平行四辺形 PQRT の面積は，まわりの三角形を除く方針で計算しています。