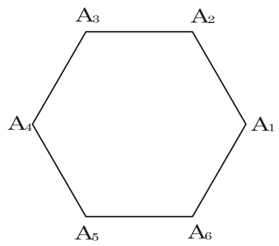
1　　　　［金沢大・文］



　図のように頂点がA_1からA_6である 1 辺の長さが 2 の正六角形がある。さいころを投げて出た目 k と頂点A_kを対応させる。さいころを 3 回投げて出た目がすべて異なるときには，対応する頂点を結んで三角形ができ，それ以外の場合には線分か点ができる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_5$の面積をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができない確率を求めよ。

(3)　さいころを 3 回投げたとき，$\triangle A_1A_2A_3$と合同な三角形ができる確率を求めよ。

(4)　さいころを 3 回投げたときにできる図形の面積の期待値を求めよ。ただし，線分と点の面積は 0 とする。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　P_3 を p で表せ。

(3)　$n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。

3　　[千葉大]

1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする。

(1)　$X=3$ である確率を求めよ。

(2)　X の期待値を求めよ。

$\boxed{4}$ ［名古屋大・文］

正六面体の各面に1つずつ，サイコロのように，1から6までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。$q_n = p_n(1) + p_n(6)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。

(1) q_1，q_2 を求めよ。

(2) q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3) $p_n(1)$ を求めよ。

1　　　　［金沢大・文］

(1)　まず，$\angle A_1A_2A_3 = 120°$ より，

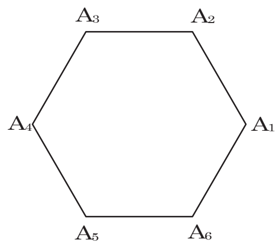
$$\triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 120° = \sqrt{3}$$

$A_1A_3 = 2\times 2\cos 30° = 2\sqrt{3}$，$\angle A_1A_3A_4 = 90°$ から，

$$\triangle A_1A_3A_4 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 = 2\sqrt{3}$$

また，$\triangle A_1A_3A_5$ は正三角形なので，

$$\triangle A_1A_3A_5 = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\sin 60° = 3\sqrt{3}$$



(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができるのは，出た目がすべて異なる場合である。すると，この確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{5}{9}$$

これより，三角形ができない確率は，$1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ である。

(3)　$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形は 6 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{6}$ である。

(4)　(3)と同様すると，$\triangle A_1A_3A_4$ と合同な直角三角形は $4\times 3 = 12$ 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{12\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{3}$ である。

また，$\triangle A_1A_3A_5$ と合同な正三角形は 2 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{2\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{18}$ である。

さいころを 3 回投げたとき，この 3 種類の三角形以外は図形の面積が 0 なので，図形の面積の期待値は，

$$\sqrt{3}\times\frac{1}{6} + 2\sqrt{3}\times\frac{1}{3} + 3\sqrt{3}\times\frac{1}{18} = \sqrt{3}$$

［解 説］

有名な問題です。期待値の計算への誘導も丁寧です。

2　　［東京大・文］

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率 P_2 は，

$$P_2=(1-p)p+p(1-p)p+(1-p)^3=(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=(1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が 3 個出る場合は，×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○のいずれかなので，その確率 P_3 は，

$$P_3=(1-p)p^2+p(1-p)p^2+(1-p)^3p+(1-p)p(1-p)^2$$
$$=p(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=p(1-p)(2-3p+3p^2)$$

(3)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ である。

(iii)　最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき
このときの確率は，$1\leqq k\leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1}=(1-p)^3p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率 P_n は，

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-1}(1+p)+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{p(1+p)+(n-1)(1-p)^2\}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+n-1\}$$

［解 説］

(1)と(2)で具体例を練習し，(3)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

3　　［千葉大］

(1)　$X=3$ となるのは，取り出された 3 枚のカードが，1 と 2，および 3 以上が 1 枚の場合なので，その確率は，

$$\frac{10-2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(2)　3 枚のカードに書かれた 3 つの整数を a，b，c（$a<b<c$）とおき，$b=k$ のときの $a+b$ の期待値を E_k とすると，

$$E_k=\{(1+k)+(2+k)+\cdots+(k-1+k)\}\cdot\frac{10-k}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{(1+k+k-1+k)(k-1)}{2}\cdot\frac{10-k}{120}=\frac{1}{80}k(k-1)(10-k)$$

すると, X の期待値 E は, $2\leqq k\leqq 9$ から,

$$E=\frac{1}{80}\sum_{k=2}^{9}k(k-1)(10-k)=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}k(k-1)(10-k)$$
$$=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}(-k^3+11k^2-10k)$$
$$=\frac{1}{80}\left(-\frac{1}{4}\cdot 9^2\cdot 10^2+11\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\right)$$
$$=\frac{33}{4}$$

［解 説］

(2)を(1)の続きとして考え，$X=4$，5，…，17 の確率を順に求めていくという見方もできます。しかし，これは大変なので，アプローチの方法を変更しました。

4 ［名古屋大・文］

(1)　まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に，試行を 2 回行ったとき，底面が 1 となるのは，$1 \to 2 \to 1$，$1 \to 3 \to 1$，$1 \to 4 \to 1$，$1 \to 5 \to 1$ の場合，底面が 6 となるのは，$1 \to 2 \to 6$，$1 \to 3 \to 6$，$1 \to 4 \to 6$，$1 \to 5 \to 6$ の場合で，それぞれの確率は，

$$p_2(1) = \frac{2}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

よって，$q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

(2)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}),\quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\quad (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より，$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$に $n=1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

(3)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので，

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\quad(n\geqq 2)$$

すると, (2)より, $p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$………(＊＊)

(＊＊) に $n=1$ をあてはめると $p_1(1)=0$ となり, $n=1$ のときも満たしている。

［解 説］

一見, 難しそうな題意を把握するために, (1)では, 考えた順にやや詳しく書きました。なお, 漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。名大では 1995 年に類題が出ています。