1　　［大阪大・文］

自然数 m, n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 m, n を求めよ。

(2)　不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ ［京都大・理］

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{3}$　　［一橋大］

次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし，斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a)　p, q, r は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　p, q, r の組をすべて求めよ。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, zは正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$および$x \leqq y \leqq z$を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1)　条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で，$y \leqq 3$となるものをすべて求めよ。

(2)　組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすようなzが存在することを示せ。

(3)　条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。

$\boxed{5}$ ［大阪大・理］

$x,\ y$ を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 $a,\ b$ を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

1　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　$0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}<1$$

すると，$\log_2 6=m+\dfrac{1}{n+a}$ から, m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2<\log_2 6<\log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m=2$$

このとき，$\log_2 6-2=\dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2\frac{3}{2}=\frac{1}{n+a},\quad n+a=\frac{1}{\log_2\frac{3}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}2$$

すると, $0<a<1$ から, n は $\log_{\frac{3}{2}}2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{2}<\log_{\frac{3}{2}}2<\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}}2<2$ となることより，

$$n=1$$

(2)　(1)から，$a=\log_{\frac{3}{2}}2-1=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2\cdot 4^3>3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

①②より，$a>\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ である。

［解　説］

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば, 不等式 $2^2\cdot 4^3>3^5$ はその 1 例です。

$\boxed{2}$ ［京都大・理］

(i)　$n=2$ のとき

　$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

　$n^2+2=11$ となり，n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n \geqq 5$ のとき

　n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき，

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

　すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より，n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

［解 説］

　まず，$n=2$，3，5，7，11，13 として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

$\boxed{3}$ ［一橋大］

(1) 三平方の定理より，$p^2=q^2+r^2$………①

また，条件(b)より，$p+q+r=132$………②

②より $p=132-q-r$ として，①に代入すると，

$$(132-q-r)^2=(q+r)^2-2qr\,,\ \ 66\times132-132(q+r)=-qr$$

よって，qr は偶数となることより，q, r のどちらかは偶数である。

(2) まず，q が偶数のときを考える。

(i) $q=2$ のとき　①より，$p^2-r^2=4$，$(p+r)(p-r)=4$

②から $p+r=130$ より，$130(p-r)=4$ となる。

これを満たす自然数 p, r は存在しない。

(ii) $q\neq2$ のとき　条件(a)より p, r はともに素数になる。

①より，$r^2=(p+q)(p-q)$

r は素数で，しかも①から $p>r$，$p>q$ なので，$p-q=1$……③となり，

$$r^2=p+q\text{………④}$$

条件(b)より，$p+q=132-r$………⑤

④⑤より，$r^2+r-132=0$，$(r-11)(r+12)=0$

したがって，$r=11$ となり，④より $p+q=121$ から，③と合わせて，

$$p=61,\ q=60$$

次に，r が偶数のときを考えると，同様にして，

$$q=11,\ p=61,\ r=60$$

以上より，$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11)$，$(61,\ 11,\ 60)$

［解 説］

(1)では，いろいろな解法が考えられますが，不要な文字 p を消去する方法を採りました。また，(2)では，素数が絡む問題でよく利用する「2 以外の素数は奇数」という事実を用いています。

$\boxed{4}$ ［東京大・理］

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ $(1\leqq x\leqq y\leqq z)$ ……①において, $y\leqq 3$ より, $y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき　$x=1$ より, $1+1+z^2=z$, $z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii) $y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$, $z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も, $D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii) $y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$, $z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1\leqq x\leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36\geqq 0$ から, $x=3$ となり,

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)～(iii)より, $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc\quad(1\leqq a\leqq b\leqq c)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, $z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より, $b\geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a\geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって, $b^2+c^2+z^2=bcz$ $(1\leqq b\leqq c\leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, 次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より, すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n\quad(1\leqq a_n\leqq b_n\leqq c_n)$$

さらに, $c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n\geqq 2c_n-a_n>0$ から, すべての $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ は異なるので, ①を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は, 無数に存在する。

［解 説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)の証明がスムーズに行えます。なお, (1)については, 最初, すべての場合をチェックしましたが, 解なしのケースがほとんどなので, 作り直した解です。また, (2)では, z を $z=-a+bc$ として設定していますが, これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

$\boxed{5}$　　［大阪大・理］

(1) 条件より，$n+1=a(y+n+1)+by$，$n+1=(a+b)y+a(n+1)$

任意の y に対して成立する条件は，$a+b=0$，$a(n+1)=n+1$ となり，

$$a=1,\ b=-1$$

(2) $\displaystyle \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……①の成立を数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

①の左辺 $=\dfrac{1}{x(x+1)}$，①の右辺 $=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}-\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

よって，$n=1$ のとき成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$\displaystyle \frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……②の成立を仮定する。

ここで，$(k+1)!=(k+1)k!$ を用いると, (1)および②より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}\\&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}\ \cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

さて，いったん $r+1=s$ とおきかえると，

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}=\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{{}_k\mathrm{C}_{s-1}}{x+s}=-\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\\&=\frac{{}_k\mathrm{C}_0}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_k}{x+k+1}\\&=\frac{1}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{1}{x+k+1}\\&=\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のとき，①は成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n について，①は成立する。

［解 説］

数学的帰納法による証明において，式変形を進めると，(1)の恒等式だけでなく，二項係数の関係 ${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}={}_{k+1}\mathrm{C}_r$ を利用するという方針が見えてきます。