1　　［神戸大・文］

平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle \mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2)　$\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle \mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおく。$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AB} = 4$ のとき，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

2　　　　［大阪大・理］

三角形 OAB の辺 OA, OB 上に，それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0<a<1,\ 0<b<1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。

3　　　　［京都大・理］

△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

$\boxed{4}$　　［京都大・文］

座標空間上に 4 点 A(2, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 2), D(1, 3, 7) がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき, 点 E の座標を求めよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大・理］

座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$をもつ直線を$L_\theta$とする。点A$(2,\ 0,\ 1)$から直線$L_\theta$に下ろした垂線と$L_\theta$との交点を$\mathrm{P}_\theta$とする。

(1)　θが実数全体を動くとき，P_θは xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

(2)　θが$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$の範囲を動くとする。三角形$\mathrm{OAP}_\theta$の面積の最大値と，そのときの$\mathrm{P}_\theta$の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ ［一橋大］

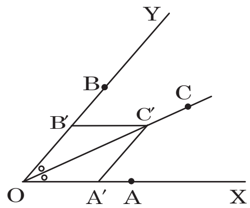
大きさがそれぞれ 5，3，1 の平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

1　　［神戸大・文］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ は，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

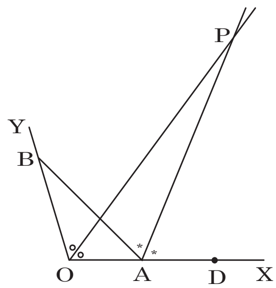


これから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とすると，線分 OC′ は OA′，OB′ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

よって，t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$ である点 C は，$\angle$XOY の二等分線上にある。

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ なので，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right)\cdots\cdots\cdots①$$



ここで，OD の中点を A として，点 D を定義すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$ から，実数 s を用いて，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}\right)=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{4}\right)$$

$$=\left(1+\frac{s}{4}\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$\frac{t}{2}=1+\frac{s}{4}\cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{t}{3}=\frac{s}{4}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{t}{2}=1+\dfrac{t}{3}$，$t=6$

よって，①から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{3}\right)=3\vec{a}+2\vec{b}$

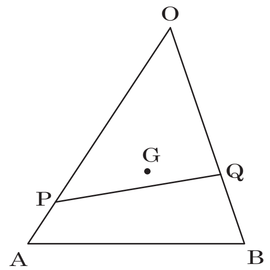
［解 説］

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)の点 P は，三角形 OAB の傍心の 1 つです。

$\boxed{2}$ ［大阪大・理］

条件より，点 G は△OABの重心であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3a}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{3b}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



G が△OPQ の内部に含まれるための必要十分条件は，

$$\frac{1}{3a} > 0,\ \frac{1}{3b} > 0,\ \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} < 1$$

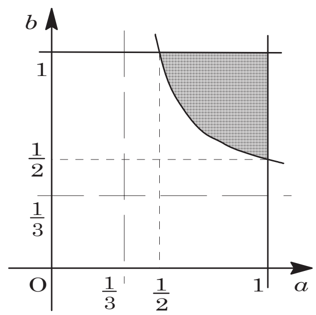
$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ より，$\dfrac{1}{3a} > 0$，$\dfrac{1}{3b} > 0$ は成立し，

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} < 1$$

変形すると，$\dfrac{1}{3b} < \dfrac{3a-1}{3a}$ となり，$3a-1 > 0$ のもとで，

$$b > \frac{a}{3a-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3a-1)}$$

よって，点$(a,\ b)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



［解 説］

まったく同じ問題に出会ったことがあるという感覚がありますが，単なる既視感かもしれません。

3　　　　［京都大・理］

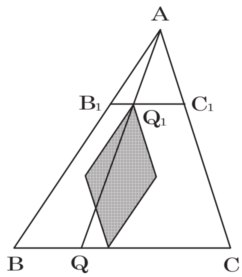
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1$, $0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$$

△PQR の重心を G とすると,

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

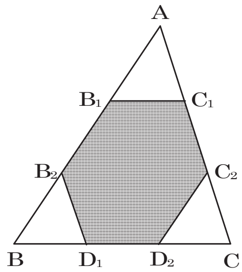
ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}$ とおき, 線分 AB_1, AC_1 を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。



さて, p, r を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, S_A を $\overrightarrow{AQ_1}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 Q_1 は線分 B_1C_1 上を点 B_1 から点 C_1 まで動く。その結果, 平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。

以上より, 辺 AB の三等分点を B_1, B_2, 辺 AC の三等分点を C_1, C_2, 辺 BC の三等分点を D_1, D_2 とおくと, 点 G は六角形 $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$ の内部を動く。

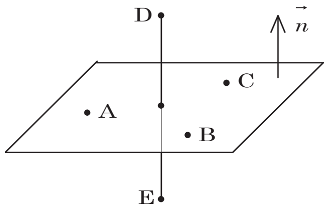


すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。

［解 説］

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］



まず，$\overrightarrow{BA}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 1,\ 1)$ となり，平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=a+b-c=0$$
$$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=-a+b+c=0$$

よって，$a=c$，$b=0$ となり，$\vec{n}=a(1,\ 0,\ 1)$

すると，平面 ABC の方程式は，

$$(x-2)+z=0,\ x+z=2\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$E(p,\ q,\ r)$ とおくと，$\overrightarrow{DE}=(p-1,\ q-3,\ r-7)$

$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\vec{n}$ より，t を実数として $\overrightarrow{DE}=t\vec{n}$ となり，

$$(p-1,\ q-3,\ r-7)=t(1,\ 0,\ 1)$$

よって，$p=t+1$，$q=3$，$r=t+7\cdots\cdots\cdots②$

また，DE の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+3}{2},\ \dfrac{r+7}{2}\right)$ は，平面 ABC 上にあるので，①より，

$$\frac{p+1}{2}+\frac{r+7}{2}=2,\ p+r+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2t+12=0$，$t=-6$

②から，$p=-5$，$q=3$，$r=1$ となり，$E(-5,\ 3,\ 1)$ である。

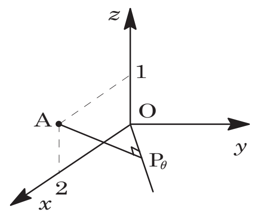
［解　説］

京大では，本年度より，出題範囲に含まれた「代数・幾何」時代の頻出題です。平面の方程式の基本事項は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{5}$　　［筑波大・理］

(1)　t を実数とし，$\vec{u}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とおくと，

$$L_\theta : (x,\ y,\ z)=t\vec{u}=t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$



これより，L_θ 上の点 P_θ は，$P_\theta(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 0)$ とおくことができる。

ここで，$A(2,\ 0,\ 1)$ から，

$$\overrightarrow{AP_\theta}=(t\cos\theta-2,\ t\sin\theta,\ -1)$$

条件より，AP_θ と L_θ は直交するので，$\overrightarrow{AP_\theta}\cdot\vec{u}=0$

$$\cos\theta(t\cos\theta-2)+t\sin^2\theta=0,\ t=2\cos\theta$$

よって，$P_\theta(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$ と表せる。

さて，$P_\theta(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$x=2\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta\cos\theta,\ z=0$$

すると，$x=1+\cos2\theta$，$y=\sin2\theta$ から，点 P_θ の描く円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$$

すなわち, xy 平面上で，中心$(1,\ 0,\ 0)$，半径 1 の円を描く。

(2)　$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{OP_\theta}=(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$ より，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta}=4\cos^2\theta,\ |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OP_\theta}|=\sqrt{4\cos^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$

ここで，$\triangle OAP_\theta$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP_\theta}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot4\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$$

$$=\sqrt{5\cos^2\theta-4\cos^4\theta}=\sqrt{-4\left(\cos^2\theta-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

すると，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{4}$ をとる。このとき，P_θ の座標は，$x=2\times\dfrac{5}{8}$，$y=2\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ から，

$$P_\theta\left(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$$

［解 説］

(2)では，有名な三角形の面積公式を利用しています。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=1$ より，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=9 \cdots\cdots\cdots ①$$

①において等号が成立するのは，左側では $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ が同じ向きのとき，右側では $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのときである。

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$ は最大値 9 をとる。

また，$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ より，$2\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 8$ となり，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq||\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}||\geqq 2-1=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

②において等号が成立するのは，左側では $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ が逆向きのとき，右側では $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が逆向きのときである。

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $\vec{a}$ と逆向きのとき，$|\vec{z}|$ は最小値 1 をとる。

(2)　条件より，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ なので，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=20$ となり，

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=20,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-5 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，③の条件のもとで，

$$|\vec{z}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=25+2\times(-5)+|\vec{b}+\vec{c}|^2=15+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$

(1)と同様に，$||\vec{b}|-|\vec{c}||\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{b}|+|\vec{c}|$ から，$2\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq 4 \cdots\cdots\cdots ④$

④の範囲の値は，すべて③を満たしており，$15+4\leqq|\vec{z}|^2\leqq 15+16$ から，

$$\sqrt{19}\leqq|\vec{z}|\leqq\sqrt{31}$$

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$ は最大値 $\sqrt{31}$ をとり，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が逆向きのとき，最小値 $\sqrt{19}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの三角不等式の問題です。(1)で $|\vec{z}|=0$ となる場合があれば，この値がもちろん最小値ですが，このようなケースはありませんでした。なお, (2)では，ベクトルの和 $\vec{b}+\vec{c}$ を変化するベクトルとしてとらえています。