1　　［大阪大］

曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。

(2)　線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

2 ［岡山大］

座標平面において，原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2) θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y = \sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

3 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，$\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ ［筑波大］

座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる立体を R とする。点$(0,\ 0,\ 1)$を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし，R と C の共通部分を T とする。

(1)　$-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点$(0,\ 0,\ 1+h)$を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2)　T の体積を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　$y = x\sin^2 x$ ……①，$y = x$ ……②に対して, x 座標が正の共有点は,

$$x\sin^2 x = x\,,\ \ \sin^2 x = 1\,,\ \ \sin x = \pm 1$$

これより，$x_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1} = x_n + \pi$ となり，

$$x_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

さて，①より，$y' = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin^2 x + x\sin 2x$

そこで，$x = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ において，

$$y' = \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\sin(2n-1)\pi = (\pm 1)^2 = 1$$

よって，曲線①と直線②は，点 A_n において接している。

(2)　$0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$ から，$x > 0$ において $x\sin^2 x \leqq x$ となり，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線①で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x\sin^2 x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} x(1 + \cos 2x)\,dx$$

ここで, (1)より，$x_n = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$，$x_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ なので,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{1}{2}({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2n\pi\cdot\pi = n\pi^2$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}} - \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x_{n+1}\sin 2x_{n+1} - x_n\sin 2x_n) + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2x_{n+1} - \cos 2x_n) = \frac{1}{4}(\cos(2n+1)\pi - \cos(2n-1)\pi)$$

$$= \frac{1}{4}(-1+1) = 0$$

したがって，$S = \dfrac{1}{2}n\pi^2$ である。

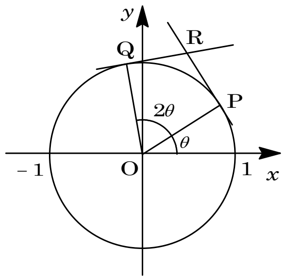
［解　説］

微積分の総合問題です。曲線①と直線②の位置関係は明らかなので，図を描くまでもありません。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］

(1) 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における接線の方程式は，それぞれ，

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1,\quad x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 1$$



この２本の接線の交点 $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ は，

$$\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1,\quad \alpha\cos 3\theta + \beta\sin 3\theta = 1$$

まとめると，$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$

さて，$\Delta = \cos\theta\sin 3\theta - \sin\theta\cos 3\theta = \sin(3\theta - \theta) = \sin 2\theta$

すると，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin 2\theta > 0$ なので，

$$\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin 2\theta}\begin{pmatrix}\sin 3\theta & -\sin\theta \\ -\cos 3\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$$

よって，$\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$$\beta = \frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta$$

(2) (1)より，$x = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, $y = 2\sin\theta$ となり，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

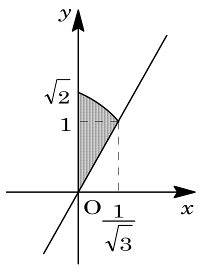
$$= \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積を S とすると，



$$S = \int_1^{\sqrt{2}} x\,dy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

［解　説］

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。

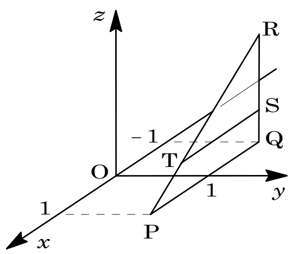
3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　P(1, 1, 0), Q(−1, 1, 0), R(−1, 1, 2) のとき,

まず線分 QR は xy 平面に垂直なので，平面 $z=t$ との交点 S の座標は，S$(-1,\ 1,\ t)$ である。

また，線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は，線分 PR を $t:2-t$ に内分する点より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)},\ \frac{t+2-t}{t+(2-t)},\ t\right)=(1-t,\ 1,\ t)$$

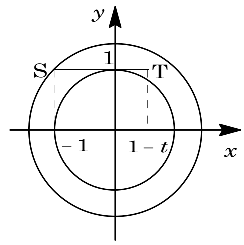


(2)　点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

(i)　$1-t\geqq 0\ (0\leqq t\leqq 1)$ のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が 1 であるので，その面積 $S(t)$ は,

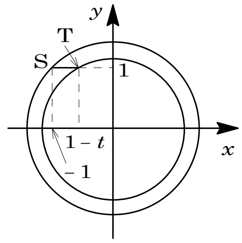
$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\cdot 1^2=\pi$$



(ii)　$1-t\leqq 0\ (1\leqq t\leqq 2)$ のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が $\sqrt{(1-t)^2+1^2}$ であるので，その面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\left(\sqrt{(1-t)^2+1^2}\right)^2=\pi(2t-t^2)$$



(i)(ii)より，△PQR の z 軸まわりの回転体の体積 V は,

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2(2t-t^2)\,dt=\pi+\pi\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば，積分計算は難しくありません。

$\boxed{4}$ ［筑波大］

(1) 条件より，立体$R: |x| \leqq z^2$ ………①

lを中心軸とする半径 1 の円柱Cの方程式は，

$C: y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ ………②

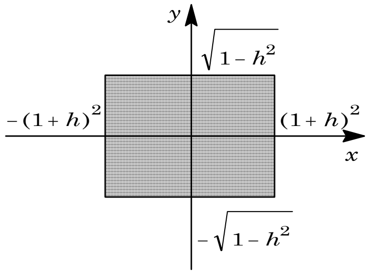
また，点$(0,\ 0,\ 1+h)$を通りz軸に垂直な平面の方程式は，

$z=1+h$ ………③

③を①に代入して，$|x| \leqq (1+h)^2$，$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2+h^2 \leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

RとCの共通部分Tを平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積$S(h)$は，



$$S(h)=2(1+h)^2\cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$=4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2) Tの体積をVとすると，

$$V=\int_{-1}^{1}S(h)\,dh=\int_{-1}^{1}4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$=4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh+8\int_{-1}^{1}h\sqrt{1-h^2}\,dh+4\int_{-1}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$=8\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh+8\int_{0}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は$\dfrac{\pi}{4}$より，

$$\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh=\frac{\pi}{4}$$

また，$h=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$\int_{0}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

以上より，$V=8\times\dfrac{\pi}{4}+8\times\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{5}{2}\pi$である。

［解 説］

10 年以上も前，旧旧課程の頃に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。