1　　［大阪大］

　直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

2　　　　［北海道大］

空間内に，3 点 $A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と，3 点 $B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1)　空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{OA_0}$，$\overrightarrow{A_0A_1}$，$\overrightarrow{A_0A_2}$，$\overrightarrow{OB_0}$，$\overrightarrow{B_0B_1}$，$\overrightarrow{B_0B_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2)　原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P′ も通っているとする。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2},\quad \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$$

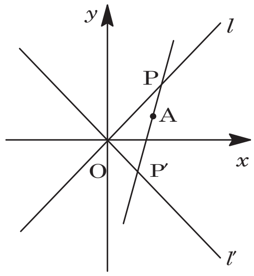
とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3)　点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P′ が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し，C' が楕円であることを示せ。

1　　［大阪大］

$P(p,\ p)$，$P'(p',\ -p')$，$Q(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}$ より，

$$p+p'=a+x,\ \ p-p'=b+y$$



よって，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+x+y)$ ………①

$$p'=\frac{1}{2}(a-b+x-y)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また, k を実数として，$\overrightarrow{AP'}=k\overrightarrow{AP}$ より，

$$(p'-a,\ -p'-b)=k(p-a,\ p-b)$$

よって，$(p'-a)(p-b)+(p'+b)(p-a)=0$ ………③

①②を③に代入して,

$$\frac{1}{4}(-a-b+x-y)(a-b+x+y)+\frac{1}{4}(a+b+x-y)(-a+b+x+y)=0$$

$$(x-b)^2-(y+a)^2+(x+b)^2-(y-a)^2=0$$

まとめると，$x^2-y^2=a^2-b^2$

点 $A(a,\ b)$ は $y=x$，$y=-x$ 上にないことより，$b\neq \pm a$ から $a^2-b^2\neq 0$ であり,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

したがって, 点 Q の軌跡は $l: y=x$ と $l': y=-x$ を漸近線とする双曲線となる。

［解　説］

文系に l と l' が x 軸, y 軸となっている類題が出ています。しかし, 本問に出合ったとき, 座標系の回転を思いつくのは, 容易なことではありません。

2　　［北海道大］

(1)　$A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$より，

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また，$B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$より，

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2)　条件より，O，P，P′が同一直線上にあるので，tを実数として，

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2})$$

(1)より，$2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3})$

$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$は1次独立なので，

$$2+\frac{1}{2}q=t\cdots\cdots\cdots①,\ p=ta\cdots\cdots\cdots②,\ \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$p=\left(2+\frac{1}{2}q\right)a$，すなわち$2p=(4+q)a$となる。

ここで，$q=-4$のときは①から$t=0$となり，③が成立しないことより，

$$a=\frac{2p}{4+q}\cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$\frac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\frac{1}{2}q\right)b$となり，$b=\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　条件より，$|\overrightarrow{A_0P}|=1$から，$|a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}|=1$となり，$|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$なので，$a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると，$\left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$，$2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，$\overrightarrow{B_0P}=p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$であり，

$$|\overrightarrow{B_0B_1}|=|\overrightarrow{B_0B_2}|=1,\ \overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_2}=0$$

そこで，B_0を原点とし，$\overrightarrow{B_0B_1}$をp軸の基本ベクトル，$\overrightarrow{B_0B_2}$をq軸の基本ベクトルとして，平面β上で直交座標系をつくることができる。このとき，点P′の座標は$(p,\ q)$となるので，⑥より，点P′が動いてできる図形C'は楕円である。

［解 説］

大学入試に久々の登場ですが，空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。