1 ［九州大］

次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1)　自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2)　(1)の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$，$ne<\beta_n$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$　［岡山大］

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 a, b は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

$a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1)　$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2)　$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3)　$e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

1 ［九州大］

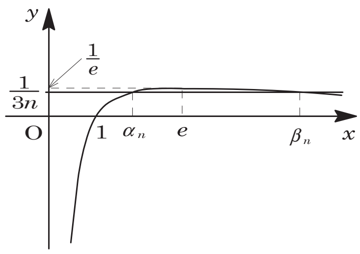
(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

ここで, $n\geqq 1$，$e<3$ から,

$$3n>ne\geqq e,\quad 0<\frac{1}{3n}<\frac{1}{e}$$

すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{1}{3n}$ は 2 つの共有点をもつ。よって，$f(x)=\dfrac{1}{3n}$ は，$x>0$ の範囲に 2 つの実数解をもつ。



(2)　まず, $n\geqq 1$ から $e^{\frac{1}{n}}\leqq e\leqq ne$ となり，$0<x\leqq e^{\frac{1}{n}}$ において $f(x)$ は単調に増加し，$x\geqq ne$ において $f(x)$ は単調に減少する。

さて，$f(\alpha_n)=\dfrac{1}{3n}>0=f(1)$ であり,

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}\geqq\frac{1}{ne}>\frac{1}{3n}=f(\alpha_n)$$

よって，$f(1)<f(\alpha_n)<f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$ となり，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$ ………(＊)

また，$f(ne)=\dfrac{\log ne}{ne}\geqq\dfrac{\log e}{ne}>\dfrac{1}{3n}=f(\beta_n)$ より，$ne<\beta_n$ である。

ここで, $n\to\infty$ のとき $e^{\frac{1}{n}}\to 1$ なので, (＊)より,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$$

［解 説］

微分法の基本問題です。(2)の不等式は，曲線 $y=f(x)$ を見ながら立式しました。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

(2)　$g(x)=x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと，

$$g'(x)=1-(x+1)\frac{1}{x+1}-\log(x+1)=-\log(x+1)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となるので，

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$f'(x)<0$ となり, $x>0$ において，$f(x)$ は単調に減少する。

すると, $0<a<b$ に対して，$f(a)>f(b)$ となり，

$$\frac{\log(a+1)}{a}>\frac{\log(b+1)}{b},\ \log(a+1)^b>\log(b+1)^a$$

よって，$(a+1)^b>(b+1)^a$

［解 説］

関数の単調性と不等式の証明をリンクさせた有名問題です。類した過去問は数え切れません。

3　　　　［筑波大］

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1 \geqq 0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq f(0)=0$ となり，$e^x-(1+x) \geqq 0$ ………①

また, $x \geqq 0$ において，$g(x)=\dfrac{x^2e^x}{2}-e^x+(1+x)$ とおくと,

$$g'(x)=\frac{2xe^x+x^2e^x}{2}-e^x+1=\frac{(x^2+2x-2)e^x}{2}+1$$

$$g''(x)=\frac{(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x}{2}=\frac{(x^2+4x)e^x}{2} \geqq 0$$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$g'(x) \geqq g'(0)=0$ より,

$$g(x) \geqq g(0)=0,\ \frac{x^2e^x}{2} \geqq e^x-(1+x) \text{ ………②}$$

①②より, $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq e^x-(1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　(i)　$a>b>0$ のとき

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}$$
$$<a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}=na^{n-1}$$

よって，$a^n-b^n<n(a-b)a^{n-1}$

(ii)　$a=b>0$ のとき　$a^n-b^n=n(a-b)a^{n-1}=0$

(i)(ii)より, $a \geqq b>0$ のとき，$a^n-b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$ ………③

(3)　$x \geqq 0$ のとき，①より，$e^{\frac{x}{n}} \geqq 1+\dfrac{x}{n}>0$ となるので，③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \text{ ………④}$$

②より，$e^{\frac{x}{n}}-1-\dfrac{x}{n} \leqq \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^2e^{\frac{x}{n}}}{2}=\dfrac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \leqq n\cdot\frac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}e^{\frac{n-1}{n}x}=\frac{x^2e^x}{2n} \text{ ………⑤}$$

④⑤より, $x \geqq 0$ のとき，$e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$

［解 説］

(1)と(2)の不等式が, (3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが, 内容には味わいがあります。