1 ［九州大］

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　$F(a)$ を求めよ。

2　　　　［東京大］

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。

3　　　　［東京工大］

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3)　a を正の数とし，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|\,dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$x=\frac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

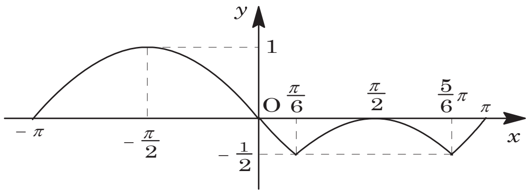
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

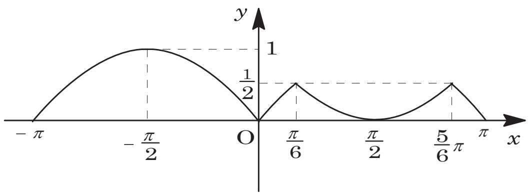
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　まず，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $f(x)=\sin x$，$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)=-\sin x+1$

また，$y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ においては，$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ となる。

(i)　$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき

$$F(a)=\int_0^a\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_0^a=\frac{1}{2}\sin^2 a$$

(ii)　$\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a(-\sin x+1)\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a+\left[\ \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin^2 a-\frac{1}{4}\right)+\sin a-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 a+\sin a-\frac{1}{4}$$

［解 説］

絶対値つきの関数のグラフを描く問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

$\boxed{2}$ ［東京大］

(1) $x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{12(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-12(e^{3x}-3e^{x})(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12(e^{5x}+3e^{x})}{(e^{2x}-1)^2}$$

すると，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{x}-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$$

以上より，$x>0$ において，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ1つ存在する。

(2) まず，$x=f(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ となる。

また，$f(t)=8$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=8$ となり，

$$3e^{3t}-2e^{2t}-9e^{t}+2=0,\ (e^{t}-2)(3e^{2t}+4e^{t}-1)=0$$

ここで, $t>0$ より $e^{t}>1$ となり，$e^{t}=2$，$t=\log 2$ である。

同様に，$f(t)=27$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=27$ となり，

$$4e^{3t}-9e^{2t}-12e^{t}+9=0,\ (e^{t}-3)(4e^{2t}+3e^{t}-3)=0$$

$e^{t}>1$ から，$e^{t}=3$，$t=\log 3$ である。

よって，
$$\begin{aligned}\int_8^{27}g(x)\,dx&=\int_{\log 2}^{\log 3}g(f(t))f'(t)\,dt=\int_{\log 2}^{\log 3}t\,f'(t)\,dt\\&=\Big[\,t\,f(t)\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=\log 3\cdot f(\log 3)-\log 2\cdot f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt\end{aligned}$$

さて，$u=e^{t}$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=e^{t}$ であり，$t=\log 2$ のとき $u=2$，$t=\log 3$ のとき $u=3$ となることより，

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt&=\int_2^3\frac{u^2-3}{u^2-1}\,du=\int_2^3\left(1-\frac{2}{u^2-1}\right)du\\&=\int_2^3\left(1-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)du=\left[u+\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_2^3\\&=1+\log 2-\log 3\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx = 27\log 3 - 8\log 2 - 12(1 + \log 2 - \log 3)$

$$= -12 - 20\log 2 + 39\log 3$$

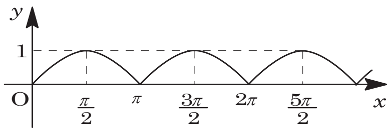
[解　説]

逆関数の定積分を題材とした重要問題です。過去にも，たとえば 1998 年に東北大で類題が出ています。

$\boxed{3}$ ［東京工大］

(1)　$f(x)=|\sin x|$ とおくと,

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|$$
$$=|-\sin x|=f(x)$$



また, k を整数として,

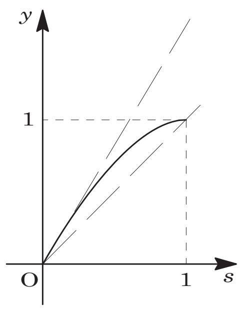
$$f(k\pi-x)=|\sin(k\pi-x)|=|\sin x|=f(x)$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは周期 π であり，しかも直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ に関して対称であるので,

$$I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-n\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=n$$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ において，$g(s)=\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{s\pi}{2}}=\sin\frac{s\pi}{2}$ とおく。

$$g'(s)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}\geqq 0,\quad g''(s)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{s\pi}{2}\leqq 0$$



これより，$y=g(s)$ のグラフは，右図のように，上に凸で単調に増加し，$g'(0)=\dfrac{\pi}{2}$ から,

$$s\leqq g(s)\leqq\frac{\pi}{2}s,\quad 0\leqq g(s)-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s$$

よって，$0\leqq\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$

(3)　まず，$at=x$ とおくと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx$$

ここで, (1)の結果を用いると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$x-\dfrac{[a]\pi}{2}=u$ とおくと，$[a]$ が奇数より,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\left|\sin\left(u+\frac{[a]\pi}{2}\right)\right|du=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}|\cos u|du$$

$0\leqq\dfrac{a-[a]}{2}\pi<\dfrac{\pi}{2}$ から,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos u\,du\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$0\leqq a-[a]<1$ なので, (2)より,

$$a-[\,a\,]\leqq\int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[\,a\,])+(a-[\,a\,])$$

$$1-\frac{[\,a\,]}{a}\leqq\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，

$$\frac{[\,a\,]}{a}+1-\frac{[\,a\,]}{a}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|\,dt\leqq\frac{[\,a\,]}{a}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$

以上より，$0\leqq\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|\,dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$

［解 説］

グラフを見ながら解いています。(1)と(2)は直接的ですが, (3)もグラフを対応させて方針を立てました。つまり，$y=f(x)$ のグラフの特徴から，$[\,a\,]$が奇数という条件の利用方法を考えたわけです。