1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

xy 平面上に曲線 $C：y=\log x\ (x>0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ であることを用いてよい。

2　　　　［東京大］

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列$\{a_n\}$を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

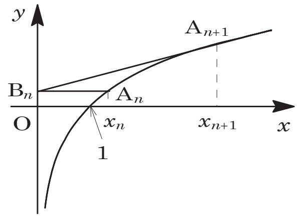
(1)　$C: y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$ となり，接点を $(t,\ \log t)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x-1+\log t$$

点 $(0,\ b)$ を通ることより，

$$-1+\log t=b,\quad t=e^{b+1}$$

よって，接線の方程式は，$y=e^{-b-1}x+b$



(2)　点 $A_n(x_n,\ \log x_n)$，$A_{n+1}(x_{n+1},\ \log x_{n+1})$ とおくと，

$B_n(0,\ \log x_n)$ となり，(1)より，

$$x_{n+1}=e^{\log x_n+1},\quad x_{n+1}=ex_n$$

$A_1(1,\ 0)$ から $x_1=1$ なので，$x_n=1\cdot e^{n-1}=e^{n-1}$

よって，$A_n(e^{n-1},\ n-1)$，$A_{n+1}(e^n,\ n)$ となり，求める面積 S_n は，

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}e^n\{n-(n-1)\}-\left\{\int_{e^{n-1}}^{e^n}\log x\,dx-(e^n-e^{n-1})(n-1)\right\}\\&=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-\Big[x\log x-x\Big]_{e^{n-1}}^{e^n}\\&=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-ne^n+(n-1)e^{n-1}+e^n-e^{n-1}\\&=\frac{1}{2}e^n-e^{n-1}=\frac{1}{2}(e-2)e^{n-1}\end{aligned}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{n}{S_n}=\dfrac{2n}{(e-2)e^{n-1}}=\dfrac{2}{e-2}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ となり，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{e}\right)T_n&=1+\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{e}{e-1}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n\end{aligned}$$

よって，$T_n=\dfrac{e^2}{(e-1)^2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right\}-\dfrac{e}{e-1}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ となり，条件より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{e-2}T_n=\frac{2}{e-2}\cdot\frac{e^2}{(e-1)^2}=\frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}$$

［解 説］

似た構図をよく見かける微積分の総合問題です。とにかく計算力がポイントです。

2　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より，帰納的に $a_n>0$ である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ ……(*)から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$ のとき $b_n>2n$ となることを示す。

(i)　$n=2$ のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times 2$ となり，$n=2$ のとき成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$b_k>2k$ と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$ のとき $b_n>2n$ である。

(2)　(1)より，$n\geqq 2$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$ より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$ となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\,\log x\,\right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$ となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3)　(*)より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$ なので，

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^n a_k+2n+2$ より，$\displaystyle\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}$

すると，(2)より，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}\to 2$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

［解 説］

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき１題です。