$\boxed{4}$　　［九州大・文］

$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2)　不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3)　不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

5　　[名古屋大・理]

(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。
$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。

$\boxed{6}$　　［広島大・文］

p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1)　点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2)　放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

(3)　放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。

7　　［大阪大・文］

xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

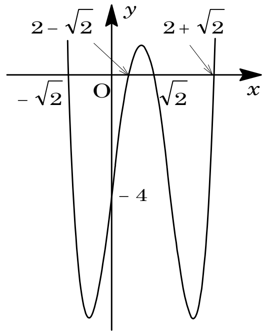
(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

(1)　$f(x)=0$ より，$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$ となり，

$$x=\pm\sqrt{2}\,,\ \ x=2\pm\sqrt{2}$$

　小さい順に並べると，$-\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$



(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(n)\leqq 0$ の解は, (1)から,

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2}\,,\ \ \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

　n は整数なので，$n=-1$，0，2，3

(3)　$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 $n=-1$，0，2，3 は，$f(n)\leqq 1$ を満たす。

　次に，$f(-2)=28>1$，$f(4)=28>1$ より，$n\leqq -2$ または $n\geqq 4$ において，$f(n)\leqq 1$ を満たす n は存在しない。

　さらに，$f(1)=1$ から，$n=1$ は $f(n)\leqq 1$ を満たす。

　以上より，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数は，$n=-1$，0，1，2，3 である。

［解 説］

数学IIの範囲は超えていますが，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフを対応させて考えています。(3)も視覚的に解いています。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

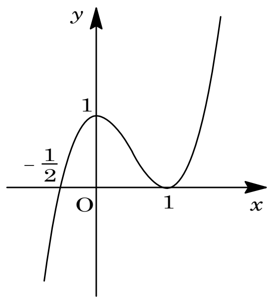
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1 である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

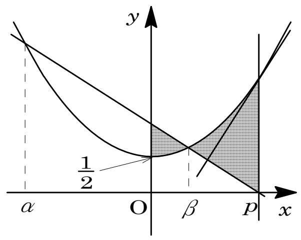
(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

［解　説］

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

$\boxed{6}$ ［広島大・文］



(1)　$C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ ……①に対して，$y'=x$

すると，$x=p$ のとき $y'=p$ である。

これより，直線 l の傾きは p となり，l に直交する直線 m は，傾きが $-\dfrac{1}{p}$ で，$\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通るので，その方程式は，

$$y=-\frac{1}{p}(x-p),\quad y=-\frac{1}{p}x+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　C と m の交点の x 座標は，①②から，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{p}x+1$，$x^2+\dfrac{2}{p}x-1=0$

ここで，$f(x)=x^2+\dfrac{2}{p}x-1$ とおくと，

$$f(0)=-1<0,\quad f(p)=p^2+1>0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha<0<\beta<p$ である。

(3)　$S_1=\displaystyle\int_0^\beta\left(-\frac{1}{p}x+1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx$，$S_2=\displaystyle\int_\beta^p\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx$ より，

$$S_2-S_1=\int_\beta^p\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx+\int_0^\beta\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx$$

$$=\int_0^p\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2p}x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^p$$

$$=\frac{p^3}{6}+\frac{1}{2p}p^2-\frac{1}{2}p=\frac{p^3}{6}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)では，S_1，S_2 を単独で求めずに S_1-S_2 を計算すればよいということは，問題文から推測できます。

$\boxed{7}$ ［大阪大・文］

(1)　$C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

条件より, $(*)$の異なる 2 つの実数解が, ともに $-2<x<2$ に存在するので,

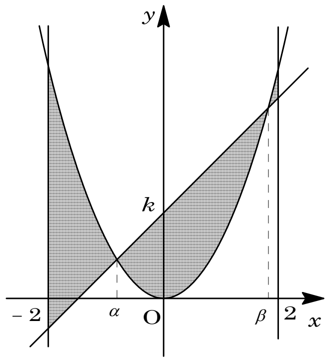
$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②③より, $-\frac{1}{4}<k<2$



(2)　$(*)$より, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり, この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると, 求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

［解　説］

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには, 上記のような工夫が必要になります。