6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

原点O(0, 0)を中心とする半径 1 の円に，円外の点P$(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$であることを示せ。

(2) 点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

8　　［東京大・理］

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を1 : 2に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときはR = P とする。

(1)　a を$-1 \leqq a \leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

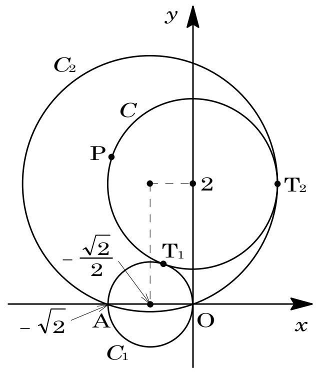
(2)　D を図示せよ。

$\boxed{6}$　　［北海道大・文］

(1)　$C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C は中心 $(0,\ 2)$，半径 $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とすると，その半径は $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。



すると, C と C_1 の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$ となり, 2 円 C と C_1 は外接する。

次に，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ で, 2 点 A, O を通る円を C_2 とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，C と C_2 の中心間距離は $d_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は $r_2-r=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$d_2=r_2-r$ より，円 C は円 C_2 に内接する。

(2)　C と C_1，C と C_2 の接点を $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ とおくと，この接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあり，

$$\angle\mathrm{AT_2O} \leqq \angle\mathrm{APO} \leqq \angle\mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O} \leqq \cos\angle\mathrm{APO} \leqq \cos\angle\mathrm{AT_2O}$$

さて, AO は C_1 の直径なので $\angle\mathrm{AT_1O}=90^\circ$ となり，$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2 の中心を B とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABO}$ より,

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

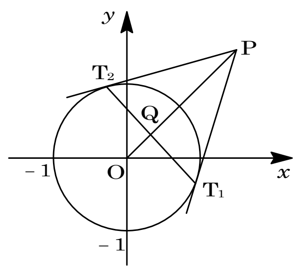
よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最小値は 0, 最大値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

［解　説］

(1)の巧みな誘導により, (2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると, 計算の海に溺れてしまいます。

© 電送数学舎 2007

7　　［名古屋大・理］



(1)　2 つの接点を $T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$ とおくと，接線の方程式はそれぞれ，

$$s_1x+t_1y=1,\ s_2x+t_2y=1$$

点 $P(x_0,\ y_0)$ を通ることより，

$$s_1x_0+t_1y_0=1\cdots\cdots①,\ s_2x_0+t_2y_0=1\cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $x_0x+y_0y=1\cdots\cdots③$ は直線を表し，①から $T_1(s_1,\ t_1)$，②から $T_2(s_2,\ t_2)$ を通過することがわかる。すなわち，③は直線 T_1T_2 を表す。

さて，直線 T_1T_2 の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$ となり，2 直線 OP，T_1T_2 は直交する。言い換えると，2 点 T_1，T_2 の中点 Q は 2 直線 OP，T_1T_2 の交点である。

ここで，直線 OP は，k を実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0),\ y_0x-x_0y=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$，$y=\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}$ となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\ \dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}+\frac{y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}}$$
$$=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}}=1$$

(2)　$Q(x_1,\ y_1)$ より，$x_1=\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

(1)から $OP\cdot OQ=1$ なので，$(x_0^2+y_0^2)(x_1^2+y_1^2)=1$ となり，⑤より，

$$x_0=x_1(x_0^2+y_0^2)=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\ y_0=y_1(x_0^2+y_0^2)=\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$ なので，⑥より $\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2}+\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}=2$

$$2x_1^2+2y_1^2-x_1-y_1=0,\ (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

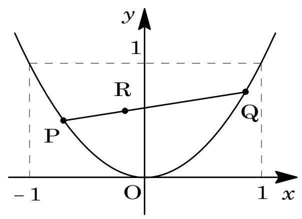
［解 説］

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

© 電送数学舎 2007

8　　［東京大・理］

(1)　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲Dに点$(a,\ b)$が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p\cdots\cdots$③となり，②に代入すると，

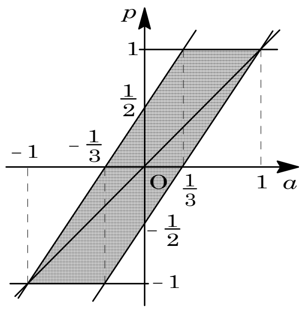
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$とおき，$-1\leqq p\leqq 1\cdots\cdots$④，$-1\leqq q\leqq 1\cdots\cdots$⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\ f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\ f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより，aの値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i)　$-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii)　$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2}$

(iv)　$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

(2)　$a<-1$，$1<a$のときは，右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

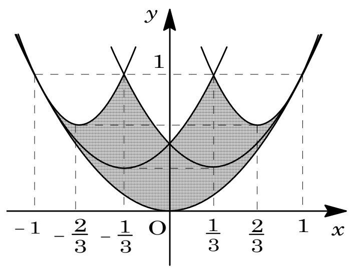
よって，(1)から，Dを表す不等式は，

$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{3}\right)$$

© 電送数学舎 2007

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

© 電送数学舎 2007