$\boxed{5}$　　　　［九州大・文］

3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$ ，$4-x$ ，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

5　　［九州大・文］

(1)　まず，$x^2-2x>0$ かつ $4-x>0$ から，$x<0$，$2<x<4$ ……①となり，条件より，

$$\sqrt{x^2-2x} \geqq 4-x \cdots\cdots ②,\quad \sqrt{x^2-2x} \geqq 2 \cdots\cdots ③$$

$4-x>0$ なので，②より $x^2-2x \geqq (4-x)^2$ となり，$x \geqq \dfrac{8}{3}$ ………②′

③から，$x^2-2x \geqq 4$ となり，$x \leqq 1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5} \leqq x$ ………③′

①②′③′をまとめると，$1+\sqrt{5} \leqq x < 4$ ………④

さらに，三角形の形成条件から，$\sqrt{x^2-2x} < (4-x)+2$

$$x^2-2x<(6-x)^2,\quad x<\frac{18}{5} \cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，$1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}$

(2)　(1)より，$\dfrac{2}{5} < 4-x \leqq 3-\sqrt{5}$ となるので，$4-x<2$ である。

よって，最短の辺の長さは $4-x$ であり，余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{2^2+(x^2-2x)-(4-x)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{x^2-2x}} = \frac{6x-12}{4\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

(3)　(1)より，$x>2$ なので，

$$\cos\theta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}$ より，$x=1+\sqrt{5}$ のとき $\cos\theta$ は最小となり，最小値は，

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{-1+5}} = \frac{3}{4}(-1+\sqrt{5})$$

［解 説］

(1)では，不等式が多量に現れるので，いったん中締めをしています。なお，両辺を2乗すると，一般的に同値関係が崩れるので注意が必要です。