5　［北海道大・文］

数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1, a_2, …, a_n を考える。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j=1$, 2, 3 とする。

(i)　$A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。

6　［東京大］

表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で，n 回硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

7　［大阪大・文］

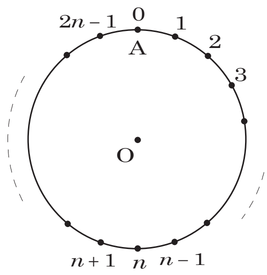
n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1)　$G=3$ となる確率を n の式で表せ。

(2)　G の期待値を n の式で表せ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2)　△ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3)　△ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

(4)　△ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。

9　　[名古屋大・理]

袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し, 出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後, 赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

(1) (i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2,\ 3$ である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(i)(ii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n = (n-1)(n+1)$$

［解　説］

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。不等号に等号のついていないタイプが，2002 年に神戸大で出題されています。

6 ［東京大］

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となるのは，最初 $n-m-1$ 回は任意，次の 1 回が裏で，その後 m 回続けて表が出る場合より，その確率 p_m は，

$$p_m=(1-p)p^m\quad(0\leqq m<n)$$

ただし，$m=n$ のとき，$p_m=p^m$ である。

(2)　最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$$

(3)　2 度のゲームにおいて，高い方のブロックの高さが m であるのは，1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下，または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m，または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=p_m(2q_{m-1}+p_m)$$
$$=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

［解 説］

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。

$\boxed{7}$ ［大阪大・文］

(1)　$G=k\ (1\leqq k\leqq 6)$ となる確率を p_k とおく。

さて，$G=3$ となるのは，3 または 6 だけが n 回出て，しかも 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_3=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　(i)　$G=6$ のとき　6 が n 回出る場合より，その確率は $p_6=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$G=5$ のとき　5 が n 回出る場合より，その確率は $p_5=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$G=4$ のとき　4 が n 回出る場合より，その確率は $p_4=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iv)　$G=3$ のとき　(1)より，$p_3=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(v)　$G=2$ のとき

2, 4, 6 だけが n 回出て，しかも 4 が続けて n 回出ない，さらに 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_2=\left(\frac{3}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(vi)　$G=1$ のとき

(i)～(v)の余事象を考えると，その確率は，

$$p_1=1-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)～(vi)より, G の期待値は,

$$\begin{aligned}&6p_6+5p_5+4p_4+3p_3+2p_2+p_1\\&=(6+5+4)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\end{aligned}$$

［解 説］

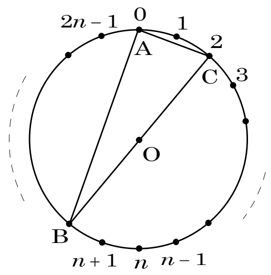
具体的に考えないとミスをしそうな問題です。特に $G=2$ のときが，注意力を要求されます。

8　　　　［広島大・理］

(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n+1,\ 1),\ (n+2,\ 2),\ \cdots,\ (2n-1,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。



(2)　辺 AB 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

また, 辺 AC 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n+1,\ n),\ (n+2,\ n),\ \cdots,\ (2n-1,\ n)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

以上より, (1)の場合も考え合わせて，△ABC の辺上に点 O がある確率は,

$$\frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\frac{6(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}$$

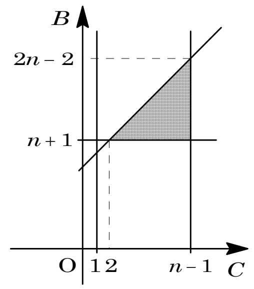
(3)　△ABC の内部に点 O がある場合は,

$$1\leqq C\leqq n-1,\ n+1\leqq B\leqq n+C-1$$

この不等式を CB 平面上に図示すると，右図の網点部となる。この領域内にある格子点$(C,\ B)$の個数は,

$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$



(4)　X の期待値を E とすると,

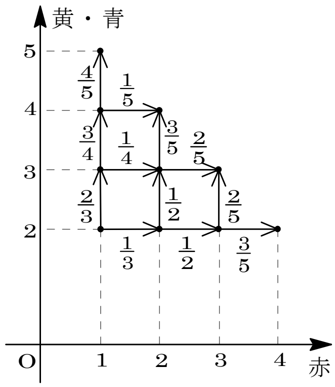
$$E=1\times\frac{3}{2n-1}+2\times\frac{n-2}{2(2n-1)}+0\times\left\{1-\frac{3}{2n-1}-\frac{n-2}{2(2n-1)}\right\}=\frac{n+1}{2n-1}$$

［解 説］

たびたび出題されている確率の有名問題です。(3)では，格子点の個数を対応させて数えています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・理]

(1)　赤玉，黄玉または青玉の個数を，(赤，黄・青)の順に記し，座標平面上の格子点を対応させると，右図のようになり，



$$p_3(1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

$$p_3(2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$p_3(3)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

したがって，

$$p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$$

(2)　$p_N(1):p_N(2):\cdots:p_N(m):\cdots:p_N(N+1)=N+1:N:\cdots:N-m+2:\cdots:1$

と，(1)より推測できるので，$1\leqq m\leqq N+1$ のとき，

$$p_N(m)=\frac{N-m+2}{1+2+\cdots+(N+1)}=\frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$$

以下，この推測の正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$N=1$ のとき　$p_1(1)=\dfrac{2}{3}$，$p_1(2)=\dfrac{1}{3}$ より，成立している。

(ii)　$N=k$ のとき　$p_k(m)=\dfrac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}$　$(1\leqq m\leqq k+1)$ と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは，(赤，黄・青)$=(1,\ k+2)$ で黄または青を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(1)=\frac{k+2}{k+3}p_k(1)=\frac{k+2}{k+3}\cdot\frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-1+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ $(2\leqq l\leqq k+1)$ となるのは，(赤，黄・青)$=(l,\ k+3-l)$ で黄または青を取り出すか，(赤，黄・青)$=(l-1,\ k+4-l)$ で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(l)=\frac{k+3-l}{k+3}p_k(l)+\frac{l-1}{k+3}p_k(l-1)$$

$$=\frac{k+3-l}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{l-1}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+3)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2(k-l+3)}{k+3}\cdot\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k-l+3)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-l+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは，(赤，黄･青)$=(k+1,\ 2)$ で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(k+2)=\frac{k+1}{k+3}p_k(k+1)=\frac{k+1}{k+3}\cdot\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2\{(k+1)-(k+2)+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

以上より，$p_{k+1}(m)=\dfrac{2\{(k+1)-m+2\}}{(k+2)(k+3)}\quad(1\leqq m\leqq k+2)$ である。

(i)(ii)より，$p_N(m)=\dfrac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}\quad(1\leqq m\leqq N+1)$

［解 説］

状態の推移を座標平面上の点を対応させて考え，(2)の証明も図を見ながら行いました。しかし，それでも注意力がかなり要求される難問です。