$\boxed{6}$　［千葉大］

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

7　　［東京大・文］

正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

8　　［京都大・文］

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

$\boxed{9}$ ［京都大］

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。

10　　［一橋大］

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=4a_n$$

$$b_1=3,\quad b_{n+1}=b_n+2a_n$$

$$c_1=4,\quad c_{n+1}=\frac{c_n}{4}+a_n+b_n$$

と順に定める。放物線$y=a_nx^2+2b_nx+c_n$をH_nとする。

(1)　H_nはx軸と2点で交わることを示せ。

(2)　H_nとx軸の交点をP_n，Q_nとする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$を求めよ。

11　［東北大］

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

12　　［東京大・理］

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

6　　［千葉大］

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき, $n-1$, $n+1$ は連続する偶数となり, 一方は4の倍数, もう一方は4の倍数でない偶数である。

よって, n^2-1 は8の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より, $n-1$, n, $n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか1つは3の倍数である。

よって, n^5-n は3の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ は連続する5つの整数なので, いずれか1つは5の倍数である。また, $5(n-1)n(n+1)$ は5の倍数である。

よって, n^5-n は5の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は8の倍数, (2)から n^5-n は3の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より, n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

［解 説］

(3)では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

7　　［東京大・文］

a を 0 以上の整数, b を 0 以上 9 以下の整数とし，$m=10a+b$ とおくと,

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10a+b)^4\\ &= 5(10^4a^4+4\cdot10^3a^3b+6\cdot10^2a^2b^2+4\cdot10ab^3+b^4)\\ &= 10^2(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

これより，$5m^4$ の下 2 桁の数は $5b^4$ の下 2 桁の数と一致する。

そこで，b のそれぞれの値に対して，$5b^4$ の下 2 桁の数を計算すると，右表のようになる。

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4 の下 2 桁	0	1	16	81	56	25	96	1	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	0	5	80	5	80	25	80	5	80	5

以上より，$5m^4$ の下 2 桁は 0, 5, 25, 80 である。

［解 説］

整数 m を $m=10a+b$ とおくことがすべてといっても，過言ではありません。

8　　［京都大・文］

[1]　命題 p について

自然数 n に対し，$\sqrt{n}$ が有理数のとき, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n} = \frac{q}{p},\ \ n = \frac{q^2}{p^2}$$

p^2，q^2 も互いに素であるので，$p^2 = 1$，すなわち $p = 1$ である。

よって，$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数である。

さて，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数, すなわち整数と仮定すると,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$$

これは，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに整数であることに反する。

よって，命題 p は正しくない。

[2]　命題 q について

[1]から，すべての n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ の少なくとも一方は無理数である。

(i)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の一方が有理数，もう一方が無理数のとき

このとき，$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は無理数となる。

(ii)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ のともに無理数のとき

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ が有理数と仮定すると, r, s を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{s}{r},\ \ \sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{s}{r}$$

両辺を 2 乗して,

$$n + 1 = n + \frac{2s}{r}\sqrt{n} + \frac{s^2}{r^2},\ \ \sqrt{n} = \frac{s}{2r} - \frac{r}{2s}$$

すると，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。

よって，$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は無理数である。

(i)(ii)より，命題 q は正しい。

［解 説］

どこかで出合ったことがあると感じる問題です。結論の予測が正しければ，背理法を利用するだけで，その根拠が説明できます。

9 ［京都大］

まず，$a+b+c+d=0$ ……①，$ad-bc+p=0$ ……②より，

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して，$(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで，$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より，$a+b \geqq a+c$

①④より，$0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から，$a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので，③から，

$$a+b=p \text{ ………⑤},\ a+c=1 \text{ ………⑥}$$

⑤より $b=p-a$ …… ⑤′，⑥より $c=1-a$ …… ⑥′

①から，$d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると，$a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり，

$$a \geqq p-a \text{ ………⑧},\ p-a \geqq 1-a \text{ ………⑨},\ 1-a \geqq -p-1+a \text{ ………⑩}$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$，⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり，$\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また，⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数，すなわち奇数であることを用いると，⑪から，

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると，⑤′ ⑥′ ⑦から，

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

［解 説］

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが，そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

$\boxed{10}$ ［一橋大］

(1) 放物線 $H_n: y=a_nx^2+2b_nx+c_n$ と x 軸との共有点は,

$$a_nx^2+2b_nx+c_n=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式を D_n とし，さらに $\dfrac{D_n}{4}=D_n'$ とおく。

条件から，$a_{n+1}=4a_n \cdots\cdots ②$，$b_{n+1}=b_n+2a_n \cdots\cdots ③$，$c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n \cdots\cdots ④$

ここで，②③④より，

$$\begin{aligned}D_n' &= {b_n}^2-a_nc_n=(b_{n-1}+2a_{n-1})^2-4a_{n-1}\left(\frac{c_{n-1}}{4}+a_{n-1}+b_{n-1}\right)\\ &= {b_{n-1}}^2+4a_{n-1}b_{n-1}+4{a_{n-1}}^2-a_{n-1}c_{n-1}-4{a_{n-1}}^2-4a_{n-1}b_{n-1}\\ &= {b_{n-1}}^2-a_{n-1}c_{n-1}=D_{n-1}'\end{aligned}$$

すると，$a_1=2$，$b_1=3$，$c_1=4$ から，

$$D_n'=D_1'={b_1}^2-a_1c_1=3^2-2\times4=1>0$$

よって，H_n は x 軸と 2 点で交わる。

(2) ①の解は，$x=\dfrac{-b_n\pm\sqrt{D_n'}}{a_n}=\dfrac{-b_n\pm1}{a_n}$ なので,

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{-b_n+1}{a_n}-\frac{-b_n-1}{a_n}=\frac{2}{a_n}$$

②より，$a_n=2\cdot4^{n-1}$ となり,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2\cdot4^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

［解　説］

まず，一般項 a_n，b_n は簡単に求まりますが，c_n を求めるには，計算に時間がかかりそうです。そこで，方向転換をしたのが上記の解です。

$\boxed{11}$ ［東北大］

(1)　x^2を$x^2-6x-12$で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^nを$x^2-6x-12$で割った商を$q_n(x)$とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\left\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\right\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1}を$x^2-6x-12$で割った余りが$a_{n+1}x+b_{n+1}$より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より$a_2=6$，$b_2=12$なので，(＊)から，帰納的にa_nとb_nはともに 6 の倍数であり，素数の公約数として, 2 と 3 をもつ。

さて，a_nとb_nが 5 以上の素数mを公約数としてもつとき, k, lを整数として,

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(＊)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$より，a_{n-1}とb_{n-1}は素数mを公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2とb_2は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは$a_2=6$，$b_2=12$に反する。

以上より，a_nとb_nの公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

［解　説］

(3)では，記述はしていませんが，a_3とb_3も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

12　　　　［東京大・理］

まず，$(1+x)^k$ を二項展開すると，

$$(1+x)^k = {}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k = 1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \geqq n$ として，整式 $P(x)$ の次数を m とおき，

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより，$(1+x)^k P(x)$ は, $m+k$ 次の整式となり，

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると，

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ b_2 = a_2 + a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + a_0\,{}_k\mathrm{C}_n \cdots\cdots\cdots (*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする。

ここで，$(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数 b_0，b_1，b_2，…，b_n がすべて整数であるとき, $(*)$より，

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ a_2 = b_2 - a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 - \cdots - a_0\,{}_k\mathrm{C}_n$$

これより，a_0，a_1，a_2，…，a_n はすべて整数となる。

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

［解 説］

上の解では簡単に記していますが，証明の構図は「a_0 が整数→a_1 が整数→a_2 が整数→ … →a_n が整数」です。