7　　　　［千葉大・文］

平面上で $\mathrm{AB}=3$ となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし, 点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き, 2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし, 線分 CD は点 A を通り, 線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

点 O を中心とする円に内接する△ABC の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を P, Q, R とする。△PQR の外心が点 O と一致するとき, △ABC はどのような三角形か。

$\boxed{9}$　　　　［大阪大］

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ ［広島大・理］

座標空間の 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C$(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

$\boxed{11}$ ［九州大・理］

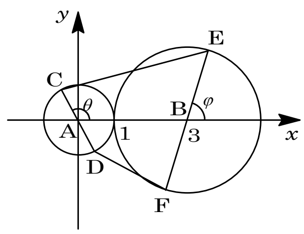
a, b を正の数とし，空間内の 3 点 A$(a,\ -a,\ b)$，B$(-a,\ a,\ b)$，C$(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

$\boxed{7}$ ［千葉大・文］



まず，右図のように，点 A を原点として，点 $B(3,\ 0)$ であるように座標系を設定する。

さて，条件より，点 C, D は A を中心とする半径 1 の円上にあるので，$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$D(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ とおくことができる。

また，点 E, F は B を中心とする半径 2 の円上にあるので，$E(3+2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi)$，$F(3-2\cos\varphi,\ -2\sin\varphi)$ とおくことができる。

これより，$\overrightarrow{CE}=(3+2\cos\varphi-\cos\theta,\ 2\sin\varphi-\sin\theta)$

$\overrightarrow{DF}=(3-2\cos\varphi+\cos\theta,\ -2\sin\varphi+\sin\theta)$

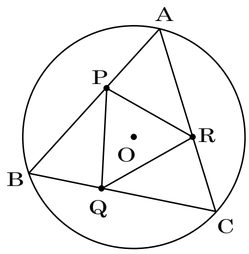
よって，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}&=9-(2\cos\varphi-\cos\theta)^2-(2\sin\varphi-\sin\theta)^2\\&=9-4-1+4(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)\\&=4+4\cos(\varphi-\theta)\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$ は，$\cos(\varphi-\theta)=1$ のとき最大値 8 をとり，$\cos(\varphi-\theta)=-1$ のとき最小値 0 をとる。

［解　説］

座標系を設定し，内積の成分計算をしましたが，計算は予想外と言ってもよいほど少なめでした。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，条件より，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}(3\vec{b}+2\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}(3\vec{c}+2\vec{a})$$

さて，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ から，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{b}+2\vec{c}|=|3\vec{c}+2\vec{a}|$$

$$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=9|\vec{c}|^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2$$

よって，(＊)から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

すると，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ から，

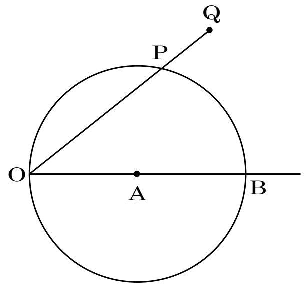
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$

以上より，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解　説］

ベクトル利用という方針を立てた後は，その始点を決定するわけですが，これを点 O にすることには，ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると，簡単な計算で結論が導けます。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］



(1)　条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(k>0)$

条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2r$ なので，③より,

$$2r\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2)　l が C と 2 点で交わる条件は, OH＜OB である。

すると，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお, 原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\parallel\vec{u}$より, sを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$，$(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$$x=-s+2,\ y=2s,\ z=5s\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\parallel\vec{v}$より, tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$，$(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$$x=t,\ y=t-1,\ z=t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-s+2=t\cdots\cdots$③，$2s=t-1\cdots\cdots$④，$5s=t\cdots\cdots$⑥

③④より，$t=\dfrac{5}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$となり，この値は⑥を満たす。

よって，①より$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$$-\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-c=0,\ c=2$$

よって，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

よって, Pは3点A, B, Cの定める平面上にある。

［解 説］

(3)では, x成分, y成分より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の係数をそれぞれ定め, その後, z成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

(1)　$A(a,\ -a,\ b)$，$B(-a,\ a,\ b)$より，$\overrightarrow{AB}=(-2a,\ 2a,\ 0)$

また，$C(a,\ a,\ -b)$, ABの中点$D(0,\ 0,\ b)$より，

$$\overrightarrow{DC}=(a,\ a,\ -2b),\ \overrightarrow{DO}=(0,\ 0,\ -b)$$

すると，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$から，

$$\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DO}\perp\overrightarrow{AB}$$

よって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot DC=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2)　$\overrightarrow{DC}$と$\overrightarrow{DO}$のなす角θは，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DO}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\frac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$$

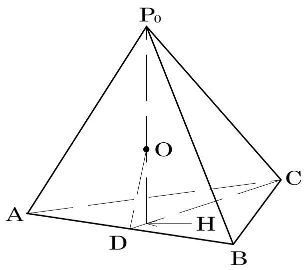
よって，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4b^2}{2a^2+4b^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

さて, OHは平面αに垂直なので，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$となり，

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

すると，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$となり，点Hは直線CD上に存在し，

$$OH=DO\sin\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$



(3)　球面Sの半径rは　$r=OA=OB=OC=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HOの延長線とSとの交点をP_0とおくと，

S上の点Pと平面αの距離の最大値はP_0Hとなり，

$$P_0H=r+OH=\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

したがって，四面体ABCPの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot P_0H=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$
$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

［解　説］

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった1題です。