$\boxed{5}$　　　　［神戸大］

$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線を C とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

6　　［千葉大］

e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log_e|x|+\dfrac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

7　　［東北大］

xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

8 ［東京工大］

(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正数 a_n に対して，$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n \geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x = \sin t$，$y = \sin 2t$ に対して, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ となり,

$$y = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(2)　(1)より，$y' = 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

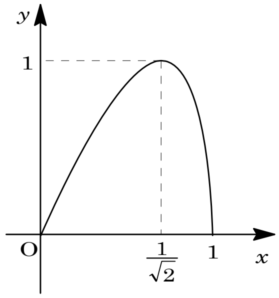
x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	2	$+$	0	$-$	$\times$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

よって, 曲線 C の概形は右下図のようになる。

そこで, x 軸と C で囲まれる図形 D の面積 S は, $u = 1 - x^2$ とおくと,

$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0 \sqrt{u}\,(-du)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



(3)　D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V は，$x = \sin t$ とおくと,

$$V = \int_0^1 2\pi x\cdot 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

［解　説］

(1)を誘導として, (2)の面積, (3)の体積を計算しています。(1)の設問がなければ, パラメータ表示のまま, S と V を計算していたことでしょう。なお, y 軸回転体の体積は, いわゆる円筒分割を利用しています。

$\boxed{6}$　［千葉大］

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log|x|+\frac{3}{4}$ に対して，$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}=\frac{x^2+1}{2x}$

さて，接点の x 座標を $x=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくとき，接線の傾きはそれぞれ $f'(\alpha)$，$f'(\beta)$ なので, 2 接線が互いに垂直である条件は,

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\cdot\frac{\beta^2+1}{2\beta}=-1$$

これより，$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=-4\alpha\beta$，$\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1+4\alpha\beta=0$

$$(\alpha\beta+1)^2+(\alpha+\beta)^2=0$$

すると，$\alpha\beta+1=0$ かつ $\alpha+\beta=0$ より，$\alpha=-1$，$\beta=1$ となる。

$\alpha=-1$ のとき，$f'(-1)=-1$，$f(-1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=-(x+1),\quad y=-x$$

$\beta=1$ のとき，$f'(1)=1$，$f(1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=x-1,\quad y=x$$

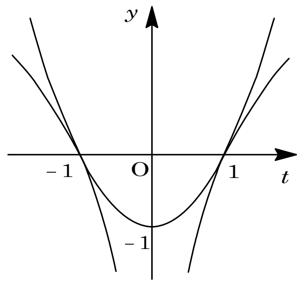
(2) 接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

原点を通ることより，$-f(t)=f'(t)(-t)$

$$-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\log|t|-\frac{3}{4}=\frac{t^2+1}{2t}\cdot(-t)$$

$$t^2+2\log|t|+3=2(t^2+1)$$

$$t^2-1=2\log|t|\cdots\cdots\cdots(*)$$



すると，右図より，(*)の解は $t=\pm1$ となり，(1)から傾きが正となる接線 l の方程式は $y=x$ である。

(3) $f''(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{x^2-1}{2x^2}$ より，$x>0$ において，曲線 $y=f(x)$ の概形は右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	＋		＋
$f''(x)$	×	－	0	＋
$f(x)$	×	↗	1	↗

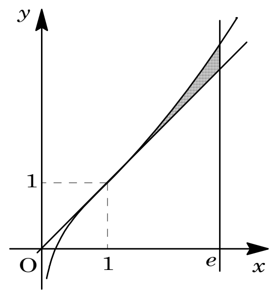
すると，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}-x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}(x\log x-x)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{12}(e^3-1)+\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}(e-1)-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{4}e+\frac{1}{6}$$



［解　説］

(1)で，α，β の値が求まるだろうかという懸念は杞憂に過ぎませんでした。

$\boxed{7}$　　［東北大］

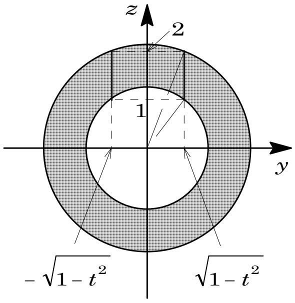
点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分 l を, z 軸のまわりに 1 回転してできる円筒形 A の方程式は,

$$x^2+y^2=1,\ 1 \leqq z \leqq 2$$

ここで, 円筒形 A を x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切断すると, その切り口は線分となり,

$$t^2+y^2=1,\ 1 \leqq z \leqq 2$$

$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1 \leqq z \leqq 2$$



ここで, この 2 本の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ状の図形について, その外径を R, 内径を r とおき, その面積を$S(t)$とすると,

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi R^2-\pi r^2 \\ &= \pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\} \\ &= \pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi \end{aligned}$$

よって, A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと,

$$V=\int_{-1}^{1} S(t)\,dt=\int_{-1}^{1} 3\pi\,dt=6\pi$$

［解　説］

立体を回転してできる回転体の求積という, 2 代前の課程のころ, よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお, 円柱側面の方程式については, 「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{8}$ ［東京工大］

(1) $f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して，

$$f_n'(x)=a_n\{(n+1-x)-(x-n)\}=a_n(-2x+2n+1)$$

また，$y=e^{-x}$ に対して，$y'=-e^{-x}$

さて, 2 曲線 $y=a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y=e^{-x}$ が $x=t_n$ で接するとすると,

$$a_n(-2t_n+2n+1)=-e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n)=e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a_n>0$ より，①②から，$2t_n-2n-1=(t_n-n)(n+1-t_n)$

$$t_n^2-(2n-1)t_n+n^2-n-1=0$$

よって，$t_n=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

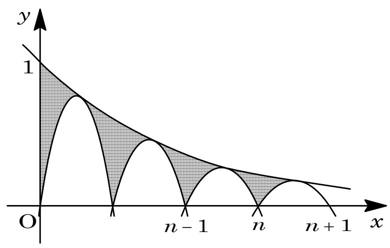
$n<t_n<n+1$ から，$t_n=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり，①に代入すると，

$$a_n=\frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) まず，$y=f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は,

$$\int_n^{n+1}a_n(x-n)(n+1-x)\,dx=\frac{a_n}{6}(n+1-n)^3=\frac{a_n}{6}$$

ここで，$0\leqq x\leqq n$ において，曲線 $y=e^{-x}$ と $y=f_0(x)$，$y=f_1(x)$，$\cdots$，$y=f_{n-1}(x)$ によってはさまれた部分の面積を T_n とおくと,



$$T_n=\int_0^n e^{-x}dx-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$
$$=-\left[e^{-x}\right]_0^n-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2k-1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=-e^{-n}+1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

さて，条件より，$T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり,

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}T_{n+1}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

［解 説］

(2)では，最初，S_n を定積分で立式しましたが，とうてい計算を実行する気になれません。そこで，$\dfrac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。