3 ［北海道大］

楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば，C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

4　　［金沢大］

$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点が一致することより,

$$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2 \quad (\alpha^2>\beta^2)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, C_1 と C_2 の交点の座標を $(p,\ q)$ とおくと,

$$\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{q^2}{\beta^2}=1,\ \beta^2p^2+\alpha^2q^2=\alpha^2\beta^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=1,\ b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 交点 $(p,\ q)$ における C_1 と C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とおくと,

$$l_1 : \frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1,\ l_2 : \frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

これより, l_1, l_2 の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ は, $\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{p}{\alpha^2},\ \dfrac{q}{\beta^2}\right)$, $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ -\dfrac{q}{b^2}\right)$

ここで, ②③をまとめると, $\begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha^2\\ b^2 & -a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$ となり,

$$\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-a^2\beta^2-\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}-a^2 & -\alpha^2\\ -b^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}a^2\alpha^2\beta^2+a^2\alpha^2b^2\\ \alpha^2b^2\beta^2-a^2b^2\beta^2\end{pmatrix}$$

すると, $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\dfrac{p^2}{\alpha^2a^2}-\dfrac{q^2}{\beta^2b^2}=\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\beta^2+b^2)-\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\alpha^2-a^2)$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(-\alpha^2+\beta^2+a^2+b^2)$$

①より, $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ となるので, 2 接線 l_1, l_2 は直交する。

［解 説］

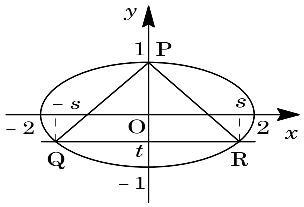
文字が多くて計算は簡単ではありませんが, 楕円と双曲線についての有名問題です。

4　　[金沢大]

(1)　△PQR の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2s(1-t)=s(1-t)$$

ここで, $\frac{s^2}{4}+t^2=1$ より, $s=2\cos\theta$, $t=\sin\theta$ とおける。すると, $s>0$, $-1<t<1$ から, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ となり, $S(t)=f(\theta)$ とすると,



$$f(\theta)=2\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=-2\sin\theta(1-\sin\theta)-2\cos^2\theta=4\sin^2\theta-2\sin\theta-2$$

$$=2(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

よって, 右表より $S(t)$ は最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき, $\theta=-\frac{\pi}{6}$ から $s=\sqrt{3}$, $t=-\frac{1}{2}$ となり, $\mathrm{R}\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ である。

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		＋	0	－	
$f(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

(2)　R における接線 l は $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}y=1$ となり, x 軸との交点は $\mathrm{T}\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ である。

これより, $\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$ となり,

$$\cos\angle\mathrm{PRT}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}=\frac{-1+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\sqrt{3+\frac{9}{4}}}=-\frac{1}{7}$$

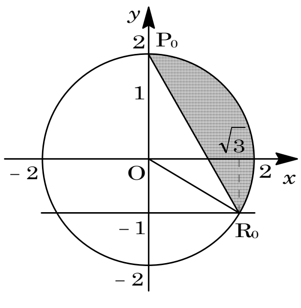
(3)　楕円 C を y 軸方向に 2 倍拡大すると, 点 P は $\mathrm{P}_0(0,\ 2)$, 点 R は $\mathrm{R}_0(\sqrt{3},\ -1)$ に移り, $\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OR}_0=\frac{2}{3}\pi$ となる。

ここで, 右図の弓形の面積を S_0 とおくと,

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

すると, 直線 PR によって分割される楕円 C の原点を含まない部分の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}S_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



[解　説]

楕円についての基本的な問題です。(3)では, 楕円を円にいったん変換して, 面積を計算しました。