$\boxed{4}$ ［東北大］

自然数 n に対し，方程式 $\dfrac{1}{x^n} - \log x - \dfrac{1}{e} = 0$ を考える。ただし，対数は自然対数であり, e はその底とする。

(1)　上の方程式は $x \geqq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を x_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ を示せ。

5　［京都大］

　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

$\boxed{4}$ ［東北大］

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{x}$

$x>0$ において，$f'(x)<0$ より，$f(x)$ は単調に減少し，

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0,\ f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

よって，$f(x)=0$ は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつ。

(2) (1)より，$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$ となり，$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$ から，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

［解 説］

(1)では，$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ より結論が導けますが，(2)につながりません。そこで，$f(x)$ の式を眺めて，$x=e^{\frac{1}{n}}$ のときの値を計算しました。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において，$b=-a$ とおくと，$f(0)=0$ から，

$$0=\frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)},\quad f(-a)=-f(a) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，①において，$b=a$ とおくと，$f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり，

$$f(a)+1=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}+1=\frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0$$

ここで，$f\left(\frac{a}{2}\right)=-1$ となる a の存在を仮定すると，②より，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-f\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

すると，$1+f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ となり，条件に反する。

よって，$f(a)+1>0$ から，$f(a)>-1$ となる。

さらに，②を用いると，$f(-a)=-f(a)<1$ となり，a が任意より $f(a)<1$

以上より，$-1<f(a)<1$ である。

(2)　①の両辺を b で微分すると，

$$f'(a+b)=\frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2}$$

$$=\frac{f'(b)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2} \cdots\cdots\cdots ③$$

③に $b=0$ を代入すると，

$$f'(a)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(0)\}^2}=1-\{f(a)\}^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

すると, (1)から，$-1<f(x)<1$ なので，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$ となり, $x>0$ で

$$f(x)>f(0)=0$$

このとき，④より，$f''(x)=-2f(x)f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である。

［解 説］

$f(0)=0$ が利用できるように，a と b に適当な関係を設定していくと，$f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。