4　［東京大］

以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。

5　　［東北大］

$a>0$ に対し $I_0(a)=\int_0^a\sqrt{1+x}\,dx$, $I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

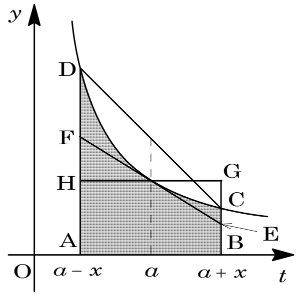
(1) $\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$y=\dfrac{1}{t}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{t^2}$，$y''=\dfrac{2}{t^3}$ となり，$t>0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。



このため，曲線上の点における接線は曲線の下側にあり，曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで, $0<x<a$ より，$0<a-x<a<a+x$ において, 右図から,

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>(\text{台形 FABE})=(\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>\frac{1}{a}\cdot 2x=\frac{2x}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<(\text{台形 ABCD})$より，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　まず，$\displaystyle\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt\cdots\cdots\cdots④$

③において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{12}\cdots\cdots\cdots⑤$

また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{24}\cdots\cdots\cdots⑥$

④⑤⑥より，

$$\frac{24}{35}=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

さらに，$\dfrac{24}{35}>0.685>0.68$, $\dfrac{17}{24}<0.709<0.71$ に注意すると,

$$0.68<\log 2<0.71$$

［解 説］

(2)では，まず $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ すなわち $a=3x$ として計算しましたが，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$ しか示せず，「やはり」という感じがしました。そこで，考え直したのが上の解です。

© 電送数学舎 2007

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a=\frac{2}{3}\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\}$ より，

$$\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}$$

(2)　$I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[x^n(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\{I_{n-1}(a)+I_n(a)\}$$

すると，$\frac{3+2n}{3}I_n(a)=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}nI_{n-1}(a)$ より，

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$$

(3)　$a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^{-\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$

$$=\frac{2}{3+2n}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}\cdot\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$0\leqq x\leqq a$ において，$f(x)=x^n\sqrt{1+x}$ は単調に増加することより，

$$0\leqq x^n\sqrt{1+x}\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

これより，$0\leqq\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx\leqq\int_0^a a^n\sqrt{1+a}\,dx=a^{n+1}\sqrt{1+a}$ となり，

$$0\leqq I_{n-1}(a)\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

すると，$0\leqq\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\leqq\sqrt{\frac{1+a}{a^3}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}}$ となり，$a\to\infty$ のとき $\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\to 0$

よって，(*)から，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}$

［解 説］

(3)は(2)の漸化式を誘導として考えるのが筋でしょうが，この式を変形する方法は思いつきません。そこで，直接的に $I_n(a)$ を評価し，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)$ を考えましたが，うまくいきません。ただ，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$ であれば極限値が求まるという発見は，その直後でした。

© 電送数学舎 2007