3　　　　［東京大］

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O, P_0, P_1, …, P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n)$, $\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

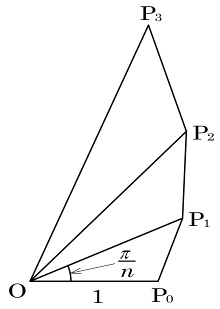
4　　［京都大］

x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{3}$　　［東京大］



$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k に対し，$\triangle P_{k-1}OP_k$ はすべて相似となり，

$P_{k-1}P_k = a_k$ とおくと，

$$a_{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_k$$

これより，$a_k = a_1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ となり，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = a_1 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{1}{n}-1}$$

$$= a_1 n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

ここで，$\triangle OP_0P_1$ に余弦定理を適用すると，

$$a_1^{\ 2} = 1^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

よって，$a_1 = \sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n^2}}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{\pi^2+1}\,(e-1)$$

［解　説］

図形と数列の極限の融合問題です。基本事項の確認が主となっており，落とすことはできません。

4　［京都大］

k を 0 でない定数として，漸化式 $a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=ky^n$ とすると，

$$ky^{n+1}=kxy^n+y^{n+1}\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $x>0,\ y>0$，$x\neq y$ なので，$ky=kx+y$，$k=\dfrac{y}{y-x}$

①－②より，$a_{n+1}-ky^{n+1}=x(a_n-ky^n)$

$a_1=0$ から，$a_n-ky^n=(a_1-ky^1)x^{n-1}=-kyx^{n-1}$

$$a_n=ky(y^{n-1}-x^{n-1})=\frac{y^2}{y-x}(y^{n-1}-x^{n-1})\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y>x$ のとき

$0<\dfrac{x}{y}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}y^{n-1}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は, $0<y\leqq 1$ である。

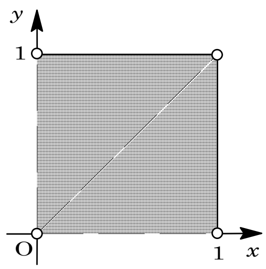
(ii)　$x>y$ のとき

$0<\dfrac{y}{x}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}x^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<x\leqq 1$ である。

(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束するような点 $(x,\ y)$ を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解　説］

漸化式の解法問題です。一般項が求まれば，収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお，上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。