8　　［東北大・文］

a を実数とし，$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x,\ f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。

9　　［大阪大・文］

実数 $a,\ b$ を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。

10　［京都大・文］

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。

11　　　　［九州大・文］

放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2)　y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

$\boxed{12}$ ［金沢大・文］

実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=-(a+1)x-1,\quad g(x)=2x+\frac{a}{3}$$

とし，$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ となる a の値を求めよ。

8　　［東北大・文］

(1)　$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ に対し，$f(x)=0$ ……(＊)とすると，

$$x\{x^2+(2a-4)x+(a-2)^2\}=0,\ \ x(x+a-2)^2=0$$

よって，(＊)の解は，$x=0,\ -a+2$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ条件は，$-a+2\neq 0$ より，$a\neq 2$ である。

(2)　$f'(x)=3x^2+2(2a-4)x+(a-2)^2=(x+a-2)(3x+a-2)$

これより，$f'(x)=0$ の解は，$x=-a+2,\ \dfrac{-a+2}{3}$

(i)　$a>2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f(-a+2)=0$$

また，極小値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

x	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\nearrow$

(ii)　$a<2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

また，極小値は，

$$f(-a+2)=0$$

x	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(3)　$y=f(x)$ の極大値を与える x について，$(x,\ y)=(x,\ f(x))$ とおくと，

(i)　$a>2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=(-a+2,\ 0)$ となるので，その軌跡の方程式は，

$$y=0\ (x<0)$$

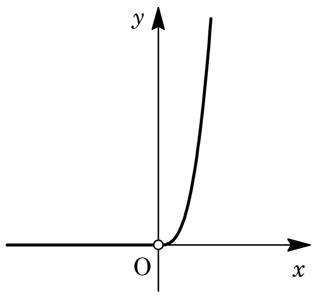
(ii)　$a<2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{-a+2}{3},\ \dfrac{-4(a-2)^3}{27}\right)$ となるので，

その軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{4}{27}(-3x)^3=4x^3\ (x>0)$$

(i)(ii)より，点 $(x,\ f(x))$ は，右図の太線を描く。



［解　説］

方程式 $f(x)=0$ の左辺が 1 次式の積として因数分解できるとは，予想しませんでした。不意を突かれた感じです。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　$P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ に対して，$P(x)=0$ の解が α，β，γ であるので，

$$\alpha+\beta+\gamma=-3a\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots②,\ \ \alpha\beta\gamma=-b\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$\alpha+\gamma=2\beta\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$\beta=-a\cdots\cdots⑤$となり，また②④より，$2\beta^2+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$2a^2+\gamma\alpha=3a$，$\gamma\alpha=-2a^2+3a\cdots\cdots\cdots⑦$

③⑤⑦より，$-a(-2a^2+3a)=-b$，$b=-2a^3+3a^2$

(2)　⑤より β は実数であるので，α，γ がともに実数である条件を求める。

④⑤より，$\alpha+\gamma=-2a$

さらに，⑦を考え合わせると，α，γ は t の 2 次方程式 $t^2+2at-2a^2+3a=0$ の 2 つの解となるので，

$$D/4=a^2-(-2a^2+3a)=3a(a-1)\geqq 0$$

よって，$a\leqq 0,\ 1\leqq a$ である。

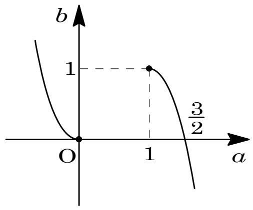
(3)　(1)より，$f(a)=-2a^3+3a^2$ となり，

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右上表のようになる。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって，(2)から $a\leqq 0,\ 1\leqq a$ において，$b=f(a)$ のグラフは右図のとおりである。



［解　説］

3 次方程式の解と係数の関係を題材にした問題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

10　　　　［京都大・文］

$2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=0$ ……①に対して，$t=\sin x+\cos x$ とおくと，

$$t^2=1+2\sin x\cos x\ ,\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

①に代入して，$2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\right)+\frac{3}{2}(t^2-1)=0$

$$2\sqrt{2}t^3-6\sqrt{2}t-3t^2+3=0,\quad 4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}=0 \text{ ………②}$$

ここで，$0\leqq x<2\pi$，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より，方程式②を満たす 1 つの解に対して，方程式①を満たす解の個数は，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき 2 個，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき 1 個となり，$t<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<t$ のときはない。

さて，$f(t)=4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-6\sqrt{2}t-12=6(2t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

すると，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)=0$ すなわち方程式②は $-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}$ に解を 1 つだけもつ。

t	$-\sqrt{2}$	…	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		＋	0	－	0
$f(t)$	$\sqrt{2}$	↗		↘	$-7\sqrt{2}$

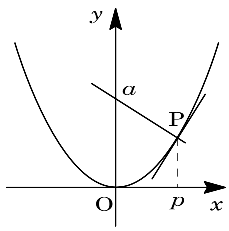
よって，方程式①を満たす x は 2 個存在する。

［解 説］

有名な三角方程式の解の個数についての問題です。t と x の個数の対応に注意が必要です。

11　　　　［九州大・文］

(1)　$C: y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。



これより, P における法線の方程式は,

$$(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

$$x+2py-p-2p^3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①が点$(0,\ a)$を通る条件は，$2pa-p-2p^3=0\ \cdots\cdots\cdots②$

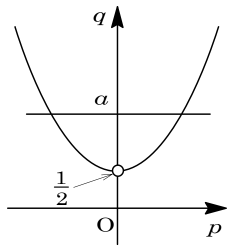
ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点$(0,\ a)$を通る法線の本数に一致することより，

(i)　$p=0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p\neq 0$ のとき

②より，$2a-1-2p^2=0$，$a=p^2+\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$



さて，$p\neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q=a$ と $q=p^2+\dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

［解　説］

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

$\boxed{12}$ ［金沢大・文］

(1)　$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 -\{(a+1)x+1\}\left(2x+\dfrac{a}{3}\right)dx$ より，

$$m(a)=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\frac{a^2+a+6}{3}x+\frac{a}{3}\right\}dx$$

$$=-\frac{2(a+1)}{3}-\frac{a^2+a+6}{6}-\frac{a}{3}=\frac{-a^2-7a-10}{6}$$

ここで，$m(a)>0$ より，$a^2+7a+10<0$，$(a+2)(a+5)<0$ となり，

$-5<a<-2$

(2)　$h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ より，

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx=\int_0^1[f(x)g(x)-m(a)\{f(x)\}^2]dx$$

$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

さて，$m(a)>0$ より，$\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ は，$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$ と同値であり，

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，$\dfrac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$ から，$a+1=-3,\ 0$ となる。

すると, (1)より，$-5<a<-2$ なので，$a=-4$ である。

［解　説］

(2)は(1)と関連し，クリアーに解ける設問になっています。