$\boxed{9}$ ［一橋大］

a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2+y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。

10　　[金沢大・理]

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A(0, 1) を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，∠QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。

11 ［神戸大・理］

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A，B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2) (1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A，B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

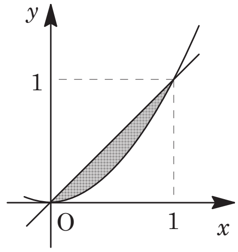
(3) A，B，C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。

12　　［東京大・文］

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{BPC}$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\mathrm{P} \neq \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。

9　　［一橋大］

不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。



さて，$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \text{………②}$$

すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$a > 0$ から，$a = 1$ となる。

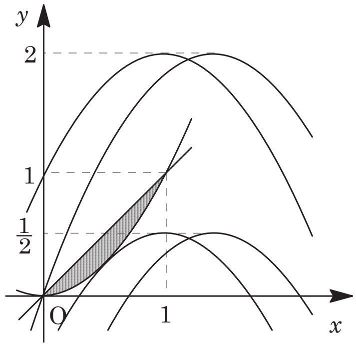
また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a > 0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

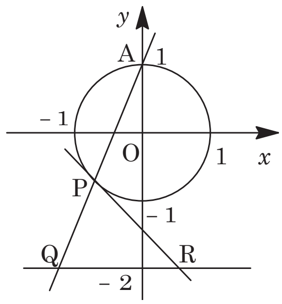
$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$



［解 説］

図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

$\boxed{10}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・理］



(1)　$C : x^2+y^2=1$ ……①と $l : y=ax+1$ ……②の交点は,

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$

$x \neq 0$ の解は, $x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より, $y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり, 点 P における円①の接線 m の方程式は,

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　②において, $y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において, $y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から, $\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで, 等号が成立するのは, $a=\dfrac{3}{a}$ $(a=\sqrt{3})$ のときである。

よって, 線分 QR の長さは, $a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき, ②より, 直線 AQ : $\sqrt{3}x-y+1=0$

また, $\mathrm{R}(0,\ -2)$ から, 直線 AR : $x=0$

すると, ∠QAR の二等分線は, 2 直線 AQ, AR から等距離にあることより,

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

∠QAR の二等分線の傾きは正より, $y=(2+\sqrt{3})x+1$

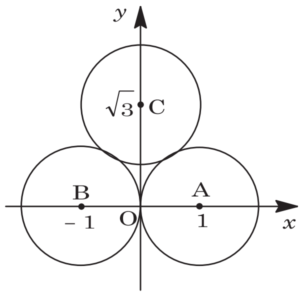
［解 説］

(3)では, 線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め, 内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

$\boxed{11}$　［神戸大・理］

(1)　A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは，外接する場合のみなので，

$$2r=2,\quad r=1$$



(2)　C$(0,\ \sqrt{3})$に対し，AC$=2$より，Cを中心とする半径1の円は, Aを中心とする半径1の円に接する。

同様に，BC$=2$より，C を中心とする半径 1 の円は, Bを中心とする半径1の円に接する。

(3)　3点A, B, Cを中心とする半径 s の 3 つの円を，それぞれ円 A, B, C とする。

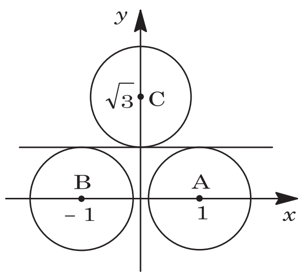
さて, (2)より，$s=1$のとき, 3円 A, B, C は互いに外接し, 3円に接する接線は存在しない。また, $s>1$ のときは, 3円 A, B, C は互いに交わり, 3円に接する接線は存在しない。また, これより, 3円に接する直線 l は, $s<1$ のときに存在する。

(i)　2円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

2円 A, B の共通外接線は x 軸に平行になり，$l:y=s$ とおくことができ, 直線 l と円 C が接することより,

$$\sqrt{3}-s=s,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。



(ii)　2円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず, 2円 A, B の共通内接線は原点を通る。

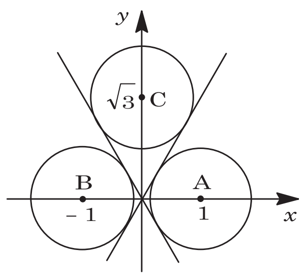
ここで, x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると,

$$\sin\theta=s,\quad \tan\theta=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y=\pm\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx-\sqrt{1-s^2}\,y=0$ とおくことができ, 直線 l と円 C が接することより,

$$\frac{\left|-\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{s^2+1-s^2}}=s,\quad 3(1-s^2)=s^2,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

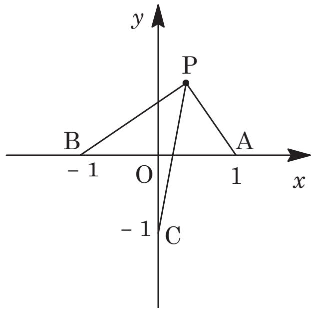
すると，$l:y=\pm\sqrt{3}x$ である。



［解 説］

(3)では，共通接線 l が 3 本存在しますが，対称性を考えると明らかでしょう。

12　　　　［東京大・文］



$A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ -1)$ に対し，$P(x,\ y)$ とおくと，

$$\overrightarrow{PA}=(1-x,\ -y),\ \overrightarrow{PB}=(-1-x,\ -y)$$

$$\overrightarrow{PC}=(-x,\ -1-y)$$

$\angle APC=\angle BPC$ より，$\cos\angle APC=\cos\angle BPC$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$$

$$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PB}|=(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PA}|$$

$$(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=(x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$(x^2+y^2-x+y)(x^2+y^2+x+y)\geqq 0$ ……①のもとで，

$$(x^2+y^2-x+y)^2(x^2+y^2+2x+1)=(x^2+y^2+x+y)^2(x^2+y^2-2x+1)$$

ここで，$u=x^2+y^2$ とおくと，

$$(u-x+y)^2(u+2x+1)=(u+x+y)^2(u-2x+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の左辺$=\{(u+y)^2-2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)+2x\}$

②の右辺$=\{(u+y)^2+2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)-2x\}$

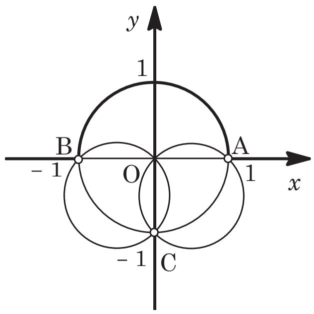
これから，②をまとめると，$-4x(u+y)(u+1)+4x\{(u+y)^2+x^2\}=0$ となり，

$$x(-u+yu-y+x^2+y^2)=0$$

$u=x^2+y^2$ より，$xy(x^2+y^2-1)=0$

$$x=0,\ y=0,\ x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より，$\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ①'$



以上より，$P\neq A,\ B,\ C$ に注意して，①′かつ③を図示すると，点 P の軌跡は右図の太線部となり，これを表す方程式は，

$$x=0\ (y\neq-1)$$

$$y=0\ (x<-1,\ 1<x)$$

$$x^2+y^2=1\ (y>0)$$

［解 説］

条件を満たす点 P の軌跡の一部が，y 軸上や原点中心の単位円周上にあることは，問題の設定からわかります。これをもとに，計算を押し進めました。