6　［京都大・文］

$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN:NB=2:1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM=\angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

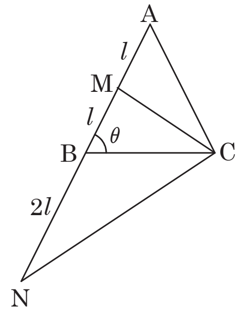
7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

地球上の北緯 $60°$ 東経 $135°$ の地点を A，北緯 $60°$ 東経 $75°$ の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える。R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。

6

［京都大・文］



まず，$AB=AC=2l$，$\angle ABC=\theta$ とおくと，

$$BC=2\times 2l\cos\theta=4l\cos\theta$$

$\triangle$BCM に余弦定理を適用すると，

$$CM^2=l^2+(4l\cos\theta)^2-2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$=l^2+8l^2\cos^2\theta=l^2(1+8\cos^2\theta)$$

次に，$\triangle$BCN に余弦定理を適用すると，

$$CN^2=(2l)^2+(4l\cos\theta)^2-2\cdot 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$=4l^2+32l^2\cos^2\theta=4l^2(1+8\cos^2\theta)$$

すると，$CM^2 : CN^2=1:4$ となり，

$$CM : CN=1:2 \cdots\cdots\cdots ①$$

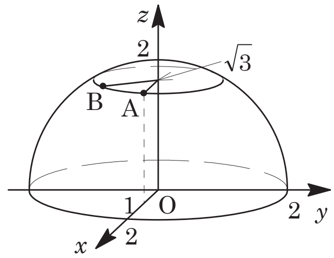
また，条件より，$MB : BN=1:2 \cdots\cdots\cdots ②$

①②から，$MB : BN=CM : CN$ となることより，$\angle BCM=\angle BCN$ である。

［解 説］

内角の二等分線の定理を利用するという方針を立て，その方向に沿って解きました。他にもいろいろな解法が考えられます。

7　　［京都大・理］



まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点 $(0,\ 0,\ 2)$ とし，東経135°を xz 平面上とする座標系を設定する。

すると，地点 A は北緯60°東経135°より，その座標は $A(1,\ 0,\ \sqrt{3})$ となる。また，地点 B は北緯60°東経75°より，$B(x,\ y,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$x = 2\cos 60^\circ \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$y = 2\cos 60^\circ \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路 R_1 は，平面 $z=\sqrt{3}$ 上での弧 AB より，その長さを l_1 とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路 R_2 は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle AOB = \theta^\circ$ とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta^\circ = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$ から，三角関数表を用いると，

$$28^\circ < \theta^\circ < 29^\circ$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$ となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$ である。

すなわち，R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3％以上短くなる。

［解 説］

大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。