$\boxed{10}$　　[東京大・文]

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\frac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

11　　［千葉大・理］

1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し，1 つがこれと異なる場合には，2 つの同じ値を X とし，3 つとも同じならその値を X とする。

(1)　確率 $P(X \leqq k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(X=k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3)　$P(X=k)$ が最大となる k の値はいくつか。

$\boxed{12}$ ［名古屋大・文］

袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ入っていることと，袋 B の中に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っていることが分かっている。

(1) 袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 袋 A から 1 つの玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 つの玉を取り出す。その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ。

(3) 袋 A から 1 つの玉を取り出したあとで，2 つの玉を袋 A から取り出すかあるいは 2 つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする。できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

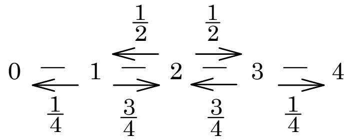
13　　［東京工大］

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P \geqq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\frac{1}{4} \geqq Q \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ。

$\boxed{10}$ 　　［東京大・文］



(1)　まず操作(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて白が 4 枚になるのは, 白の枚数に注目して場合分けをすると, その確率は,

(i)　2→1→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(ii)　2→3→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(i)(ii)より, $\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて黒が 4 枚となる確率も同じく $\frac{3}{32}$ より, 4 枚とも同じ色のカードになる確率は,

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

(2)　まず, 操作(A)を n 回繰り返した後, 白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n, 白が 2 枚の確率を b_n とおくと,

$$a_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots ①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, $b_{n+1}=\frac{3}{4}b_{n-1}$

ここで, 条件より, $b_0=1$, $b_1=0$ なので,

(i)　n が奇数のとき, $b_n=0$

(ii)　n が偶数のとき, $b_n=b_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて, 操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は, $\frac{1}{4}a_{n-1}=\frac{1}{4}b_{n-2}$ から,

(i)　n が奇数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

(ii)　n が偶数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

［解 説］

状態の推移の対称性を利用して, (2)では漸化式を立てました。

11　　［千葉大・理］

(1)　題意の値 X について, $X \leqq k$ となる場合は次の 2 通りである。

(i)　記録した値がすべて k 以下のとき

このとき，k^3 通りの場合がある。

(ii)　記録した値の 1 つが k より大, 他の 2 つが k 以下のとき

このとき，${}_3\mathrm{C}_1(n-k)k^2 = 3(n-k)k^2$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，$P(X \leqq k) = \dfrac{k^3+3(n-k)k^2}{n^3} = \dfrac{k^2(-2k+3n)}{n^3}$　（$k=n$ のときも成立）

(2)　(i)　$k=1$ のとき

$$P(X=1) = P(X \leqq 1) = \frac{3n-2}{n^3}$$

(ii)　$k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1) \\ &= \frac{k^2(-2k+3n)}{n^3} - \frac{(k-1)^2\{-2(k-1)+3n\}}{n^3} \\ &= \frac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3} \cdots\cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

なお, $(*)$に $k=1$ を代入すると，$\dfrac{3n-2}{n^3}$ となり，成立する。

(i)(ii)より，$P(X=k) = \dfrac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3}$

(3)　(2)より，$P(X=k) = \left\{-6\left(k-\dfrac{n+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3n^2-1}{2}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3$

(i)　n が奇数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k = \dfrac{n+1}{2}$ のときである。

(ii)　n が偶数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k = \dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n}{2}+1$ のときである。

［解　説］

(1)は，問題文の流れに沿って立式すること可能ですが，出題者の意図は上の解のように，題意を読み替えることでしょう。

12　　［名古屋大・文］

(1)　赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている袋 B から 2 個の玉を取り出すとき，${}_5C_2$ 通りが同様に確からしいとする。

すると，取り出された玉が，赤 0 個，白 2 個の確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$，赤 1 個，白 1 個の確率は $\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$，赤 2 個，白 0 個の確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$ となり，赤玉の個数の期待値は,

$$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

(2)　赤玉 2 個，白玉 2 個が入っている袋 A から 1 個の玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 個の玉を取り出す。このとき，赤 2 個となる確率は,

(i)　袋 A から赤玉を取り出したとき　$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{10}$

(ii)　袋 A から白玉を取り出したとき　$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{20}$

(i)(ii)より，$\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{9}{20}$

(3)　最初に袋 A から取り出した玉の色で場合分けをする。

(i)　最初に袋 A から赤玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 1 個，白 2 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$0\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}+1\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\dfrac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\dfrac{2}{3}<\dfrac{6}{5}$ なので，次は袋 B から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{6}{10}+3\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{11}{10}$$

(ii)　最初に袋 A から白玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 2 個，白 1 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\dfrac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\dfrac{4}{3}>\dfrac{6}{5}$ なので，次は袋 A から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(i)(ii)より，できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値は，

$$\frac{11}{10}+\frac{2}{3}=\frac{53}{30}$$

［解　説］

期待値をもとに有利・不利を判断する問題です。誘導はていねいですが，焦ると混乱してしまいます。

13 ［東京工大］

(1) 題意のサイコロを振ったとき, k の目が出る確率を p_k とおくと,

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

サイコロを 2 回振ったとき, 同じ目の出る確率 P は, $(*)$より,

$$\begin{aligned}P&={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2\\&=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}(p_1+p_2+\cdots+p_6)-\frac{1}{6}\\&=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって, $P\geqq\dfrac{1}{6}$ となる。

また, 等号が成立するのは, $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\dfrac{1}{6}$ のときである。

(2) サイコロを 2 回振ったとき, 1 回目に奇数, 2 回目に偶数の出る確率 Q は,

$$Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$$

相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $(*)$より,

$$(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)\leqq\left(\frac{p_1+p_3+p_5+p_2+p_4+p_6}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

よって, $Q\leqq\dfrac{1}{4}$ となる。

また, $3P+2Q-1=3({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1$

ここで, $(*)$から, $1=(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$ に注目すると,

$$\begin{aligned}&3({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1\\&=2({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)-2(p_1p_3+p_3p_5+p_5p_1+p_2p_4+p_4p_6+p_6p_2)\\&=(p_1-p_3)^2+(p_3-p_5)^2+(p_5-p_1)^2+(p_2-p_4)^2+(p_4-p_6)^2+(p_6-p_2)^2\end{aligned}$$

よって, $3P+2Q-1\geqq0$ より, $Q\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ となる。

以上より, $\dfrac{1}{4}\geqq Q\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ が成立する。

［解 説］

(1)は, 有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用するという手もありますが, ここでは結論を予測して平方完成をしました。(2)の右側の不等式の証明は難ですが, 式を変形しているうちに気付いた方法で記しています。