13 [神戸大・理]

1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

14　　[千葉大]

以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。

15　　　　[広島大・理]

平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり，なす角が $120°$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ を求めよ。

(2)　k, l を整数とするとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数であることを示せ。

(3)　(2)で，k または l が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ。

(4)　m, n が整数であり，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではないことを示せ。

16　［東京大・文］

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。

$$a_1 = p,\ b_1 = p+1$$

$$a_{n+1} = a_n + pb_n,\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

17　　　［九州大・文］

放物線$C : y=x^2-1$と$a_1>1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点$(a_1,\ {a_1}^2-1)$における接線と x 軸との交点の x 座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2)　(1)で求めたa_2に対して，C 上の点$(a_2,\ {a_2}^2-1)$おける接線と x 軸との交点の x 座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n>1$を示せ。

(3)　$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$とおくとき，すべてのnに対して，$b_{n+1}<{b_n}^2$を示せ。

(4)　$a_1=2$のとき，$b_n<10^{-12}$となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$を 0.301 として計算してよい。

18　　［名古屋大・理］

次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組$(x,\ y)$の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数を求めよ。

$\boxed{13}$　　　　［神戸大・理］

(1)　まず，$S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$である。

さて，kを0以上の整数として，nを4で割った余りで分類する。

(i)　nを4で割った余りが0のとき　$n=4k+4$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii)　nを4で割った余りが3のとき　$n=4k+3$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より，Sは偶数である。

(2)　(iii)　nを4で割った余りが1のとき　$n=4k+1$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv)　nを4で割った余りが2のとき　$n=4k+2$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より，Sはいずれも奇数である。

よって，(1)と合わせ，Sが偶数ならば，nを4で割った余りは0または3である。

(3)　Sが4の倍数ならば，(2)より，nを4で割った余りは0または3となるので，nを8で割った余りは0, 3, 4, 7のいずれかである。

(i)　nを8で割った余りが0のとき　$n=8k+8$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+8)(8k+9)=4(k+1)(8k+9)$$

(ii)　nを8で割った余りが3のとき　$n=8k+3$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$は奇数より，Sは4の倍数ではない。

(iii)　nを8で割った余りが4のとき　$n=8k+4$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$は奇数より，Sは4の倍数ではない。

(iv)　nを8で割った余りが7のとき　$n=8k+7$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+7)(8k+8)=4(k+1)(8k+7)$$

(i)～(iv)より，Sが4の倍数ならば，nを8で割った余りが0または7である。

［解　説］

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は，(1)の逆の証明ですが，転換法を意識して記述しています。(3)は(2)が誘導です。

$\boxed{14}$ ［千葉大］

(1)　x は有理数より, $p(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2)　k, l を整数とし, a, b を偶数, 奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となることより, s は整数である。

［解 説］

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

$\boxed{15}$　　［広島大・理］

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 120^\circ=-1$ より,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$$

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=2(k^2-kl+l^2)$

よって, k, l は整数より, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数である。

(3)　(i)　k が奇数, l が奇数のとき

k^2, kl, l^2 はすべて奇数より, k^2-kl+l^2 は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(ii)　k が奇数, l が偶数のとき

k^2 は奇数, kl, l^2 は偶数より, k^2-kl+l^2 は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(iii) k が偶数, l が奇数のとき

k^2, kl は偶数, l^2 は奇数より, k^2-kl+l^2 は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(i)～(iii)より, k または l が奇数のとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(4)　まず, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば, $m=n=0$ を証明する。

$|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{2(m^2-mn+n^2)}$ が整数となるためには, (3)より, m^2-mn+n^2 が偶数, すなわち m, n がともに偶数であることが必要である。

そこで, $m=2m_1$, $n=2n_1$ (m_1, n_1 は整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2\sqrt{2({m_1}^2-m_1n_1+{n_1}^2)}$$

すると, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数となるためには, m_1, n_1 がともに偶数であることが必要であり, $k=1,\ 2,\ \cdots$ として, $m_k=2m_{k+1}$, $n_k=2n_{k+1}$ (m_k, n_k は整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2^k\sqrt{2({m_k}^2-m_kn_k+{n_k}^2)}$$

これより, m_k, n_k がともに偶数であるのは, $m=n=0$ の場合しかありえない。よって, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば, $m=n=0$ である。

この命題の対偶をとると, $m=n=0$ ではないならば, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではない。

［解 説］

(4)は, 0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと, いつかは奇数になるということを利用しています。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

16　　［東京大・文］

(1)　$x_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np$，$y_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1 \cdots\cdots(*)$とおくと，

$$a_n = x_n + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + np,\quad b_n = y_n + n(n-1)p^2 + np + 1$$

(i)　$n=1$のとき

$a_1 = p$，$b_1 = p+1$より，$x_1 = a_1 - p = 0$，$y_1 = b_1 - p - 1 = 0$

よって，x_1，y_1はともにp^3で割り切れる。

(ii)　$n=k$のとき

x_k，y_kがともにp^3で割り切れると仮定する。

条件より，$a_{n+1} = a_n + pb_n$，$b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n$から，

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= a_{k+1} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p \\
&= a_k + pb_k - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p \\
&= x_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp + p\{y_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\} \\
&\quad - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p \\
&= x_k + py_k + k(k-1)p^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= b_{k+1} - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1 \\
&= pa_k + (p+1)b_k - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1 \\
&= p\left\{x_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + (p+1)\{y_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\} \\
&\quad - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1 \\
&= px_k + (p+1)y_k + \frac{3k(k-1)}{2}p^3
\end{aligned}$$

$k(k-1)$は偶数なので，x_{k+1}，y_{k+1}はともにp^3で割り切れる。

(i)(ii)より，x_n，y_nはともにp^3で割り切れる。

(2)　$(*)$より，$a_p = x_p + \frac{p(p-1)}{2}p^2 + p^2 = x_p + \frac{p-1}{2}p^3 + p^2$

(1)より，x_pはp^3で割り切れ，またpは奇数より$\frac{p-1}{2}$は整数となり，a_pはp^2で割り切れる。さらに，p は 3 以上なので，p^2はp^3で割り切れないことより，a_pはp^3では割り切れない。

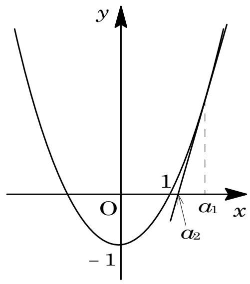
［解　説］

整数と漸化式の融合という頻出タイプの 1 題です。数学的帰納法を利用すると，明快に証明することができます。

17

［九州大・文］

(1)　$C: y=x^2-1$ に対して，$y'=2x$ より，点 $(a_1,\ a_1{}^2-1)$ における接線は,



$$y-(a_1{}^2-1)=2a_1(x-a_1)$$

点 $(a_2,\ 0)$ を通ることより,

$$-a_1{}^2+1=2a_1(a_2-a_1),\ 2a_1a_2=a_1{}^2+1$$

よって，$a_2=\dfrac{a_1{}^2+1}{2a_1}$

(2)　(1)と同様にすると，$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2+1}{2a_n}$ となる。

ここで, すべての n に対して，$a_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　条件より $a_1>1$ なので, 成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定すると,

$$a_{k+1}-1=\frac{a_k{}^2+1}{2a_k}-1=\frac{(a_k-1)^2}{2a_k}>0$$

よって，$a_{k+1}>1$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対して $a_n>1$ である。

(3)　条件より，$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$ なので,

$$b_n{}^2-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}(a_{n+1}-1)=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}$$

$$=\frac{1}{4}(a_n-1)^2\cdot\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{(a_n-1)^3}{4a_n}$$

$a_n>1$ より，$b_n{}^2-b_{n+1}>0$ すなわち $b_{n+1}<b_n{}^2$ ……(＊)である。

(4)　まず，$b_1=\dfrac{1}{2}(2-1)=\dfrac{1}{2}$ であり，$a_n>1$ から $b_n>0$ となるので, (＊)より,

$$\log_{10}b_{n+1}<2\log_{10}b_n$$

よって, $n\geqq 2$ において，$\log_{10}b_n<2^{n-1}\log_{10}b_1=-2^{n-1}\log_{10}2=-0.301\times 2^{n-1}$

ここで，$b_n<10^{-12}$，すなわち $\log_{10}b_n<\log_{10}10^{-12}=-12$ を満たすためには,

$$-0.301\times 2^{n-1}\leqq -12,\ 2^{n-1}\geqq\frac{12}{0.301}>39.8$$

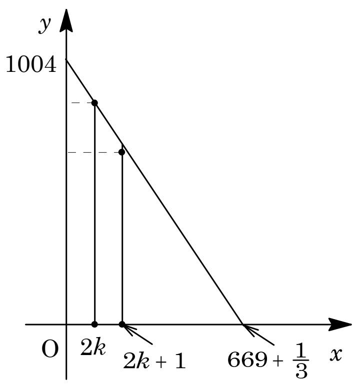
よって, $n\geqq 7$ であればよく，求める n の値の 1 つは 7 である。

［解　説］

有名なニュートン法の理系風の問題です。

$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ で，不等式 $3x+2y \leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x = 2k\ (0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y = \frac{1}{2}(2008 - 3\cdot 2k) = 1004 - 3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x = 2k+1\ (0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y = \frac{1}{2}\{2008 - 3(2k+1)\} = 1004 - 3k - \frac{3}{2}$$

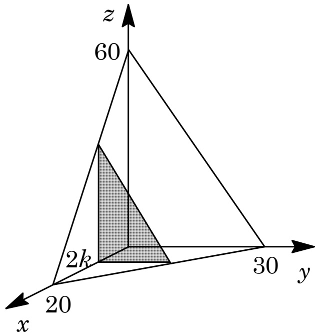
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k-2 = 1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N = \sum_{k=0}^{334}(1005-3k) + \sum_{k=0}^{334}(1003-3k) = \sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$= 2008 \times 335 - 6 \times \frac{1}{2}\cdot 334 \cdot 335 = 337010$$

(2)　$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ で，不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ すなわち $3x+2y+z \leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。

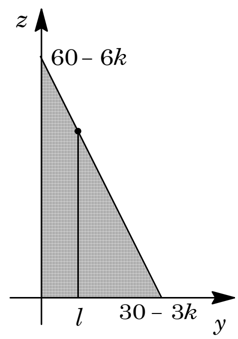


(i)　$x = 2k\ (0 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y + 60 - 6k$$

(1) と同様に考えて，直線 $y = l\ (0 \leqq l \leqq 30-3k)$ 上で，$0 \leqq z \leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,



$$N_{2k} = \sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k) + (61-6k)(31-3k)$$

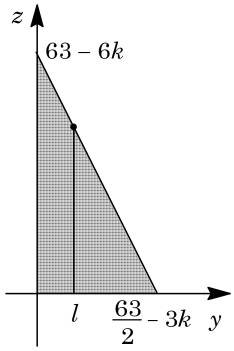
$$= (31-3k)^2$$

(ii)　$x = 2k-1\ (1 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k-1$ 上の格子点の個数を N_{2k-1} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-3(2k-1) = -2y+63-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 31-3k)$ 上では，$0 \leqq z \leqq -2l+63-6k$ より，格子点は $-2l+64-6k$ 個あるので，



$$N_{2k-1} = \sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)+(64-6k)(32-3k)$$
$$= (33-3k)(32-3k)$$

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は，

$$N = \sum_{k=0}^{10} N_{2k} + \sum_{k=1}^{10} N_{2k-1} = N_0 + \sum_{k=1}^{10}(N_{2k}+N_{2k-1})$$
$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}\{(31-3k)^2+(33-3k)(32-3k)\}$$
$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}(2017-381k+18k^2)$$
$$= 31\times31+2017\times10-381\times\frac{1}{2}\times10\times11+18\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21$$
$$= 7106$$

［解　説］

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。