12　　［大阪大］

点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle \mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s, 線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A, B と C, D が, $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。

$\boxed{13}$ ［九州大・理］

△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形△OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ。

(3)　3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{14}$ ［一橋大］

正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を$2:1$に内分する点を P, 辺 OB を$1:2$に内分する点を Q とし, $0<t<1$ を満たす t に対して, 辺 OC を$t:1-t$に内分する点を R とする。

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) $\triangle$PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。

15　　［金沢大・文］

xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S : x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

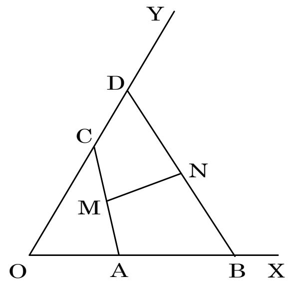
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3)　球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

$\boxed{12}$ ［大阪大］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと,



$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって, $\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ ($s>0$, $t>0$) より, $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると, $\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき, s^2+st+t^2 は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

よって, (1)より, MN の最大値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお, (2)では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

$\boxed{13}$　［九州大・理］

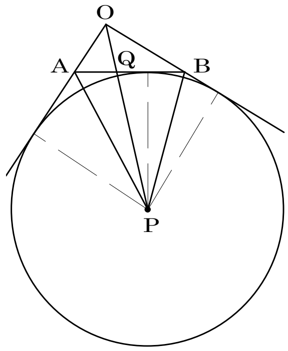
(1)　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=a:b$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}=a+b-c$ より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{ABP}=(a+b-c):c$ となり，

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=(a+b-c):(a+b)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}$



(3)　高さの等しい三角形の面積比は，底辺の長さの比になることより，

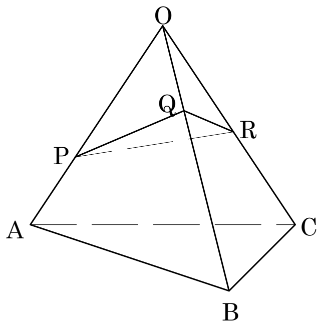
$$a:b:c=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}=3:5:6$$

よって，(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

［解　説］

(3)は，三角形の傍心のベクトル表示ですが，(2)の誘導を利用すると，計算は不要です。なお，内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが，これは出題者の善意に反します。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］



(1)　$\mathrm{OP}=\frac{2}{3}$，$\mathrm{OQ}=\frac{1}{3}$ より，△OPQ に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 60^\circ=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)　まず，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{1}{6}t-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

また, (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{3}$ から，△PQR の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}\right)^2}$$

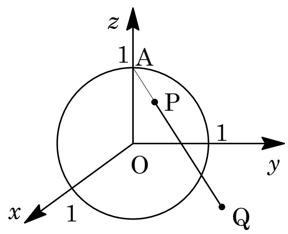
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}t^2-\frac{1}{9}t+\frac{1}{27}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}\left(t-\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{99}\right)}$$

よって，$t=\frac{2}{11}$ のとき，△PQR の面積は最小となる。

［解　説］

正四面体を題材にした頻出のもので, 参考書の例題に掲載されそうな問題です。

15　　　　［金沢大・文］



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)(0,\ 0,\ 1) + t(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$= (tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0)$$

ここで，点 Q は xy 平面上の点なので，$1-t+tz_0 = 0$

すると，$z_0 \neq 1$ から，$t = \dfrac{1}{1-z_0}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x,\ y,\ 0)$ とおくと，(2)より，$x = \dfrac{x_0}{1-z_0}$ ………①，$y = \dfrac{y_0}{1-z_0}$ ………②

条件より，点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は，球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面 $y = \dfrac{1}{2}$ の共通部分

である C 上を動くことより，

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = 1 \text{ ………③},\quad y_0 = \frac{1}{2} \text{ ………④}$$

③④より，$x_0{}^2 + z_0{}^2 = \dfrac{3}{4}$ ………⑤

また，②④より，$y = \dfrac{1}{2(1-z_0)}$ となり，$y \neq 0$ から，$1-z_0 = \dfrac{1}{2y}$，

$$z_0 = 1 - \frac{1}{2y} \text{ ………⑥}$$

①⑥より，$x_0 = \dfrac{x}{2y}$ ………⑦

⑥⑦を⑤に代入すると，$\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{2y}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

$$x^2 + (2y-1)^2 = 3y^2,\quad x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0 \text{ ………⑧}$$

⑧は $y \neq 0$ を満たすことより，点 Q は xy 平面上で円 $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ を描く。

［解 説］

有名な構図の問題です。誘導がたいへん丁寧です。