9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を α で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 　［京都大］

次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ \ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ。

$\boxed{11}$ ［筑波大］

xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C: x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1) 直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

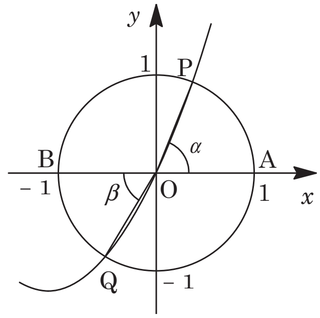
(3) Q が C 上を 1 周するとき，(2)で求めた体積の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。G_1，G_2 を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

9　［東北大］



(1)　$f(x)=x^2+2kx$ に対し，点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので,

$$\sin\alpha=\cos^2\alpha+2k\cos\alpha$$

よって，$k=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

(2)　まず, 弧PQに対する扇形の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$$

また, 線分 $\mathrm{OP}:y=x\tan\alpha$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}-x(x-\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}\cos^3\alpha$$

同様にして，$\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ から，線分 $\mathrm{OQ}:y=x\tan\beta$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_3 は,

$$S_3=\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}-x(x+\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$$

よって，$S(k)=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3)　まず, (1)より，$k+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\tan\alpha$ であり，$|\cos\alpha|\leqq 1$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において, $k\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

また, 点 $\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので,

$$-\sin\beta=\cos^2\beta-2k\cos\beta$$

よって，$k=\dfrac{\sin\beta+\cos^2\beta}{2\cos\beta}=\dfrac{1}{2}(\tan\beta+\cos\beta)$ より，$k-\dfrac{1}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{2}\tan\beta$

すると, 同様にして, $k\to\infty$ のとき $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

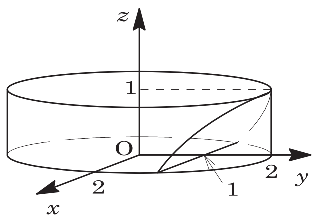
以上より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\frac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)\right\}=\frac{1}{2}\pi$

［解 説］

計算量も適度な, 微積分の総合問題です。なお, (3)の結論は, 図からの予測と一致するものです。

10　　［京都大］

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面 H の方程式は，



$$z=y-1$$

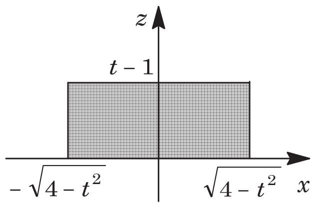
円柱 C を平面 H で分けた下方の部分を A としたとき，A を表す不等式は，

$$x^2+y^2 \leqq 4,\quad 0 \leqq z \leqq 1,\quad z \leqq y-1$$

ここで, A を $y=t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ で切断したとき，その切り口は，$y=t$ 上で,

$$x^2 \leqq 4-t^2,\quad 0 \leqq z \leqq 1,\quad z \leqq t-1$$

$1 \leqq t \leqq 2$ より，$4-t^2 \geqq 0$，$0 \leqq t-1 \leqq 1$ から,



$$-\sqrt{4-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{4-t^2},\quad 0 \leqq z \leqq t-1$$

この切り口の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

よって, A の体積を V とすると,

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(4-t^2)\sqrt{4-t^2}\,\right]_1^2-2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

［解 説］

非回転体の体積を求める頻出問題です。京大では必須の平面の方程式を利用しています。なお，積分の第 2 項は，半径 2 の円を用いて，面積として計算しています。

11　　［筑波大］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$ より，直線 PQ は，u を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)+u(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

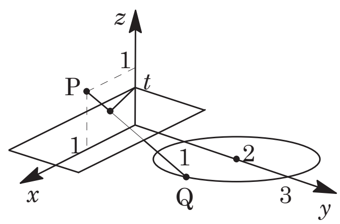
さて，平面 $z=t$ と交わるのは，$1-u=t$ より，$u=1-t$ のときであり，このとき，

$$x=1+(1-t)(\cos\theta-1)=(1-\cos\theta)t+\cos\theta,\quad y=(1-t)(2+\sin\theta)$$

条件より，交点を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とおくと，

$$\alpha^2+\beta^2=\{(1-\cos\theta)t+\cos\theta\}^2+(2+\sin\theta)^2(1-t)^2$$
$$=(6+4\sin\theta-2\cos\theta)t^2+(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)t+(5+4\sin\theta)$$

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を，平面 $z=t$ で切断したときにできる切り口は，中心が $(0,\ 0,\ t)$ で，半径が $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ の円である。



その断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi(\alpha^2+\beta^2)$$

よって，求める立体の体積 V は，(1)より，

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\pi\int_0^1(\alpha^2+\beta^2)\,dt$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{3}(6+4\sin\theta-2\cos\theta)+\frac{1}{2}(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)+(5+4\sin\theta)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)$$

(3)　α を $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ を満たす角と決めると，(2)より，

$$V=\frac{\pi}{3}\{6+\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)\}$$

すると，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ となり，V の最大値は $\dfrac{\pi}{3}(6+\sqrt{17})$，最小値は $\dfrac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$ である。

［解 説］

軸とねじれの位置にある線分を回転したときにできる曲面で囲まれた立体の体積を求める頻出問題です。ただ，本問は計算量が多めです。

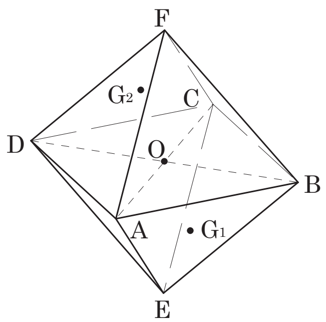
12　　　　［東京大］

(1)　1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，△ACE は∠AEC = 90° の直角二等辺三角形であるので，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

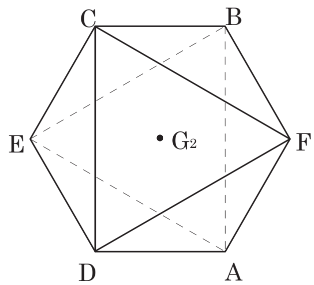


すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心をG_1とおくと，①②より，線分OG_1は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心をG_2とおくと，線分OG_2は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより，3 点G_1, O, G_2は一直線上にある。

これより，△ABE の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE をG_2(G_1)のまわりに180° だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。



(2)　直線G_1G_2を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると，その外形は，辺 AF をG_1G_2のまわりに回転したものに等しい。

さて，辺 BE の中点を M とおき，△OAM において，

$$\mathrm{AG_1}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{G_1G_2}=2\mathrm{OG_1}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG_1}^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，G_1を原点とし，平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに，G_1Aを x 軸，G_1G_2を z 軸とすると，

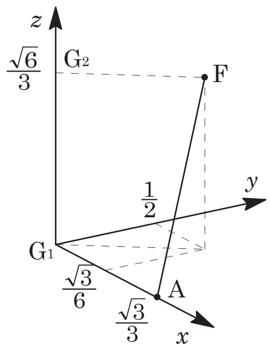
$$\mathrm{G_1}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{G_2}\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$

また，点 F の x 座標と y 座標は，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$



これより，直線 AF のパラメータ表示は,

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)+t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面 $z=k\ \left(0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ との交点は，$2\sqrt{6}t=k$ より $t=\frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり,

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体 R を平面 $z=k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと,

$$S(k)=\pi(x^2+y^2)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体 R の体積 V は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(k)\,dk=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)dk$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k^2+\frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{27}\right)=\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

[解 説]

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。