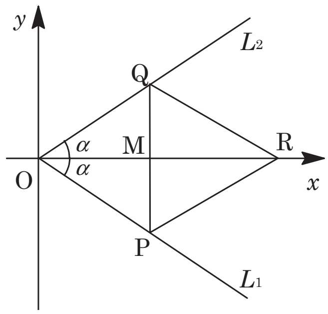
5 ［東京工大］

平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

5　　［東京工大］



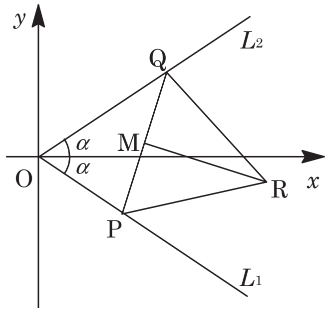
(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて，PQ の中点 M は，$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり，

$$\mathrm{MR}=\mathrm{MP}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\tan\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2)　半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ $(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とすることができるので，$p>0,\ q>0$ として，

$$\mathrm{P}(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ \mathrm{Q}(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，PQ の中点 M は，

$$\mathrm{M}\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ より，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q) \cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q) \cdots\cdots ③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

よって，点 R の軌跡は楕円の一部である。

［解 説］

図形と方程式の重要題の１つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。