$\boxed{6}$　　［九州大］

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

7　　　　［名古屋大］

曲線 C : $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

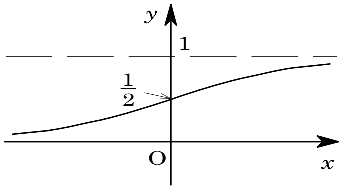
$$=-\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↗

また，$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ と変形すると，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

これより，$y=1$，$y=0$ の 2 本の漸近線が存在し，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)\ \Leftrightarrow\ x=f^{-1}(y)$ より，$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおき, x について解くと，

$$(1-y)e^x=y,\quad x=\log\frac{y}{1-y}\quad (0<y<1)$$

よって，$f^{-1}(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ より，$f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$

(3)　$f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\log\dfrac{\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+2}}-\log\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\log\dfrac{1}{n+1}-\log\dfrac{1}{n}$ から，

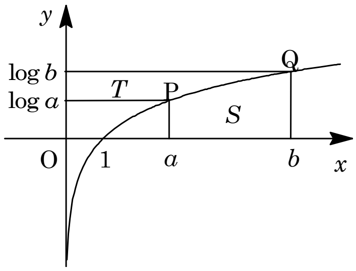
$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\log\frac{1}{e}=-1$$

［解 説］

関数のグラフに関する基本問題です。(3)で，ひとひねりがあると予測しましたが，これは，はずれてしまいました。

$\boxed{7}$　　［名古屋大］



$a \leqq x \leqq b$ において，曲線 $C: y=\log x$ と x 軸にはさまれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b \log x\,dx=\left[\,x\log x - x\,\right]_a^b$$

$$=b\log b - a\log a - b + a$$

$\log a \leqq y \leqq \log b$ において，曲線 C と y 軸にはさまれた部分の面積 T は，

$$T=b\log b - a\log a - S = b-a$$

条件より，$S=T$ のとき，$b\log b - a\log a = 2(b-a)$ となり，

$$\frac{b\log b - a\log a}{b-a}=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

以下，①を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の範囲を求める。

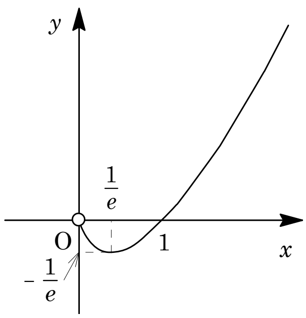
ここで，$f(x)=x\log x$ とおくと，

$$f'(x)=\log x + x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，右図のようになる。



さて，①から，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2 \cdots\cdots\cdots ②$

すると，②を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の条件は，

$f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より，

$$\log a + 1 < 2$$

よって，$1<a<e$ である。

［解　説］

②式を，曲線の割線の傾きとしてとらえ，接線の傾きとの関係を図形的に処理しています。