$\boxed{6}$ ［岡山大］

a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq\frac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。

7 ［筑波大］

e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}\,dx\,,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}\,dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ。

8　［広島大］

次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$　　［岡山大］

(1)　部分積分を用いて,

$$\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = -\left[e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a + \int_0^a e^{a-x}\, n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}dx$$

$$= -\left(1+\frac{a}{n}\right)^n + e^a + \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx + e^a - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$a \geqq 0,\ n \geqq 1$ より，$1+\dfrac{a}{n} \geqq 1$ となり，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1} \leqq \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots ②$

また，①より，$e^a - \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = \displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx - \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$

$$= \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}-1\right)dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1} \leqq \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqq e^a \cdots\cdots\cdots ④$

(3)　④より, $0 \leqq x \leqq a$ において，$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} \leqq e^x$ となり，

$$\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}e^x dx = \frac{e^a}{n}\int_0^a x\,dx = \frac{a^2e^a}{2n}$$

よって，③から，$e^a - \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqq \dfrac{a^2e^a}{2n}$

［解　説］

定積分と不等式の証明問題です。細かく付いた誘導に従えば，式変形の方向を見失うことはないでしょう。

7　　　　［筑波大］

(1)　$f(t)-g(t)=\int_1^e \frac{t^2-x^2}{t-x}\log x\,dx=\int_1^e (t+x)\log x\,dx = t\int_1^e \log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx$

$$=t\Big[x\log x-x\Big]_1^e+\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=t\{e-(e-1)\}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき，$0<\frac{1}{t-x}\leqq\frac{1}{t-e}$ より，

$$0<\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx\leqq\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-e}dx=\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx$$

ここで，$\int_1^e x^2\log x\,dx=k>0$ とおくと，$0<g(t)\leqq\frac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t\to\infty$のとき $\frac{k}{t-e}\to 0$ なので，$\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ である。

(3)　(1)より，$f(t)-\frac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{bt^2}{t-a}$

$$=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\left(bt+ab+\frac{a^2b}{t-a}\right)$$

$$=g(t)+(1-b)t+\frac{1}{4}(e^2+1)-ab-\frac{a^2b}{t-a}$$

$t\to\infty$のとき，$g(t)\to 0$，$\frac{a^2b}{t-a}\to 0$ より，$\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)$が有限な値となるために必要な条件は,

$1-b=0$，$b=1$

このとき，$\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{g(t)+\frac{1}{4}(e^2+1)-a-\frac{a^2}{t-a}\right\}=0$ より，

$\frac{1}{4}(e^2+1)-a=0$，$a=\frac{1}{4}(e^2+1)$

［解 説］

(2)の k の値を計算すると，$\frac{1}{9}(2e^3+1)$ となりますが，この値は，ここでは必要ありません。

8　　　　［広島大］

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1}=\frac{1-x}{(n+1)(n+x)}\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq f(0)=0$

また, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x)=\dfrac{x}{n}-\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$

以上より, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{x}{n+1}\leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq \dfrac{x}{n}$

(2)　区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$$

(3)　$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ のとき,

$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)+\log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで，$x=\left(\dfrac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0 \leqq x \leqq 1$ となり, (1)より,

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,\quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}$$

すると，対数関数は定義域で連続であることより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{6}}$ となる。

［解　説］

基本的で，しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも，(3)への誘導が，無理のない形になっており，演習する価値のある 1 題です。