13　　［京都大・文］

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。

$\boxed{14}$ ［東京大・文］

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2 |f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。

15　　　　［千葉大・文］

a と k を正の実数とする。$y=\frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 O$(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

16　　　　[神戸大・理]

$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\quad g(\alpha_2)=\alpha_1,\quad g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。

$\boxed{13}$ ［京都大・文］

まず，$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$ を変形して，

$$\int_0^x f(y)\,dy+x^2\int_0^1 f(y)\,dy+2x\int_0^1 yf(y)\,dy+\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

$p=\int_0^1 f(y)\,dy$ ……①，$q=\int_0^1 yf(y)\,dy$ ……②，$r=\int_0^1 y^2 f(y)\,dy$ ……③とおくと，

$$\int_0^x f(y)\,dy+px^2+2qx+r=x^2+C \quad\text{………④}$$

④の両辺を x で微分すると，$f(x)+2px+2q=2x$

$$f(x)=-2(p-1)x-2q \quad\text{………⑤}$$

④に $x=0$ を代入すると，$r=C$ ………⑥

①⑤より，$p=\int_0^1 \{-2(p-1)y-2q\}\,dy=-p+1-2q$，$2p+2q=1$ ………⑦

②⑤より，$q=\int_0^1 \{-2(p-1)y^2-2qy\}\,dy=-\frac{2}{3}(p-1)-q$，$p+3q=1$ ………⑧

⑦⑧より，$p=q=\frac{1}{4}$ となり，

$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

③⑥より，$C=\int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

［解 説］

定型的な積分方程式の問題です。$f(x)$ を 1 次以下の整式として設定し，与えられた式に代入する方法もあります。

$\boxed{14}$ ［東京大・文］

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f(0)=0$，$f(2)=2$ より，

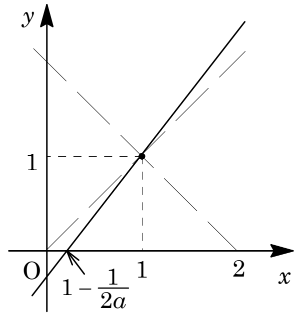
$$c=0,\ 4a+2b+c=2$$

よって，$b=1-2a$ から，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

また，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ とおくと，$x=1-\dfrac{1}{2a}$

これより，$y=f'(x)$ のグラフは右図のようになる。



(i)　$2a\geqq 1\left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx$$

$$=-\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^{1-\frac{1}{2a}}+\Big[a(x-1)^2+x\Big]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(\frac{1}{4a^2}-1\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)+a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+\left(1+\frac{1}{2a}\right)=2a+\frac{1}{2a}$$

(ii)　$-1<2a<1\left(-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)dx=\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^2=2$$

(iii)　$2a\leqq -1\left(a\leqq-\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=-2a-\frac{1}{2a}$$

(2)　(i)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は $2a=\dfrac{1}{2a}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(ii)　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$S=2$

(iii)　$a\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a'=-a\geqq\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$S=-2a-\frac{1}{2a}=2a'+\frac{1}{2a'}\geqq 2\sqrt{2a'\cdot\frac{1}{2a'}}=2$$

等号は $2a'=\dfrac{1}{2a'}\left(a=-\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

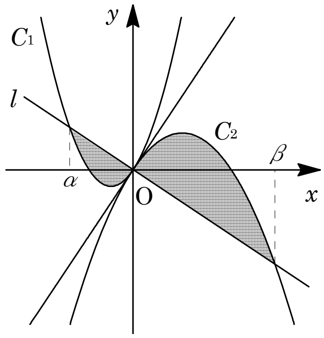
(i)～(iii)より，S は $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 2 をとる。

［解 説］

定積分の計算問題ですが，三角形や台形の面積計算と読み直しても可です。

$\boxed{15}$　　［千葉大・文］

(1)　原点を通る放物線C_1の方程式を，$y=\dfrac{a}{2}x^2+px$ とおくと，$y'=ax+p$ となる。



条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$p=k$ となり，

$$y=\frac{a}{2}x^2+kx\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，同様にして，原点を通る放物線C_2の方程式を，$y=-\dfrac{2}{a}x^2+qx$ とおくと，$y'=-\dfrac{4}{a}x+q$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$q=k$ となり，

$$y=-\frac{2}{a}x^2+kx\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，直線 $y=kx$ に垂直な直線 l は，$y=-\dfrac{1}{k}x\ \cdots\cdots③$である。

①③の交点 $x=\alpha\neq 0$ は，$\dfrac{a}{2}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\alpha=-\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_1=\int_\alpha^0\left(-\frac{1}{k}x-\frac{a}{2}x^2-kx\right)dx=-\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha)^3=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

②③の交点 $x=\beta\neq 0$ は，$-\dfrac{2}{a}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\beta=\dfrac{a}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_2=\int_0^\beta\left(-\frac{2}{a}x^2+kx+\frac{1}{k}x\right)dx=-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\beta^3=\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

よって，$S=S_1+S_2=\dfrac{2}{3a^2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3+\dfrac{a^2}{24}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3=\dfrac{1}{24}\left(a^2+\dfrac{16}{a^2}\right)\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3$

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ のとき，$k+\dfrac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$ より，

$$S=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)(2\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)$$

ここで，$a^2>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$a^2+\frac{16}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}=8$$

なお，等号は，$a^2=\dfrac{16}{a^2}$ すなわち $a=2$ のときに成立し，このとき S は最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

［解　説］

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について，その最小値を求めるという頻出問題です。

$\boxed{16}$　　　　［神戸大・理］

(1)　$f(x)=x^3-3x+1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x-1)(x+1)$$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

すると，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$-2<x<-1$，$-1<x<1$，$1<x<2$ に 1 つずつある。

すなわち，$f(x)=0$ は，絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α は $f(x)=0$ の解なので，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ から，$\alpha^3=3\alpha-1$………(＊)

また，$g(x)=x^2-2$ から，$g(\alpha)=\alpha^2-2$ となり，(＊)より，

$$f(g(\alpha))=f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$$
$$=(3\alpha-1)^2-6\alpha(3\alpha-1)+9\alpha^2-1$$
$$=9\alpha^2-6\alpha+1-18\alpha^2+6\alpha+9\alpha^2-1=0$$

よって，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である。

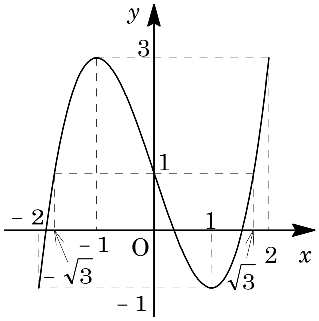
(3)　$f(-\sqrt{3})=f(0)=f(\sqrt{3})=1$ より，$f(x)=0$ の解を α_1，α_2，α_3（$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$）としたとき，

$$-2<\alpha_1<-\sqrt{3},\ 0<\alpha_2<1,\ 1<\alpha_3<\sqrt{3}$$

すると，$g(x)=x^2-2$ より，

$$1<g(\alpha_1)<2,\ -2<g(\alpha_2)<-1,\ -1<g(\alpha_3)<1$$

よって，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$ となる。



また，(2)から，$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ も $f(x)=0$ の解であることより，

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{g(\alpha_1),\ g(\alpha_2),\ g(\alpha_3)\}$$

以上より，$g(\alpha_1)=\alpha_3$，$g(\alpha_2)=\alpha_1$，$g(\alpha_3)=\alpha_2$ である。

［解　説］

グラフの概形から考えると，(3)での $x=\pm\sqrt{3}$ を用いた解のとりうる範囲の評価は，難しくはないでしょう。なお，記憶をたどって調べたところ，1997 年に早大・理工で本問と同じ問題が出ています。