13　［金沢大・文］

xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 $\mathrm{E}(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q, 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R，$\angle\mathrm{AEP}$ を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

(1)　△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3)　△PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の, a と r の関係式を求めよ。

14　　［金沢大・理］

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle \mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 AA′ と BB′ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。

15　［京都大・文］

x, y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x, y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

16 ［一橋大］

(1)　任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

17　　[広島大・理]

座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$ を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　△ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

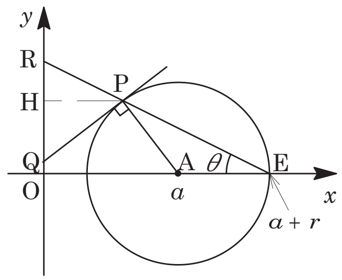
(3)　3 つの角∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］



(1)　まず，$\angle \mathrm{AEP}=\theta$ より $\angle \mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

また，$\angle \mathrm{APE}=\theta$，$\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\angle \mathrm{QPR}=\pi-\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって，$\angle \mathrm{QRP}=\angle \mathrm{QPR}$ から，$\triangle \mathrm{PQR}$ は辺 PR を底辺とする二等辺三角形である。

さらに，二等辺三角形 PQR が正三角形になるのは，$\angle \mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{3}$ の場合より，

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3},\ \ \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2)　まず，$\triangle \mathrm{PQR}$ の頂点の 1 つが原点であるのは，点 Q が原点の場合である。

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\angle \mathrm{EAP}=\dfrac{2}{3}\pi$ となり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=a+r\cos\frac{2}{3}\pi=a-\frac{1}{2}r,\ \ y=r\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

すると，点 P における円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ の接線の方程式は，

$$\left(a-\frac{1}{2}r-a\right)(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}ry=r^2,\ \ -x+\sqrt{3}y=-a+2r$$

この接線の y 軸との交点 Q が原点に一致することより $-a+2r=0$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

(3)　条件より，正三角形 PQR の外接円の半径は r なので，正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PR}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2r,\ \ \mathrm{PR}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r\ \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，P から y 軸に下ろした垂線の足を H とおくと，

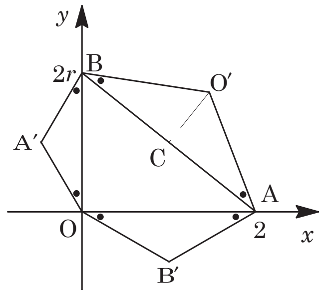
$$\mathrm{PH}=\mathrm{PR}\cos\frac{\pi}{6},\ \ a-\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PR}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$a-\dfrac{1}{2}r=\dfrac{3}{2}r$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

［解 説］

円と接線，および三角形の位置関係についての標準的な問題です。いろいろな解法が考えられますが，角に着目したのが上の解です。

$\boxed{14}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・理］



(1)　$A'(x_1,\ y_1)$，$B'(x_2,\ y_2)$，$\angle A'OB=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\quad y_1=r$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，$A'(-rt,\ r)$，$B'(1,\ -t)$

(2)　$\overrightarrow{AA'}=(-rt-2,\ r)$ より，直線 AA' の法線ベクトルの成分を $(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{BB'}=(1,\ -2r-t)$ より，直線 BB' の法線ベクトルの成分を $(2r+t,\ 1)$ とすることができる。これより，直線 AA'，BB' の方程式は，

$$AA' : r(x-2)+(rt+2)y=0,\quad rx+(rt+2)y=2r \cdots\cdots\cdots ①$$

$$BB' : (2r+t)x+(y-2r)=0,\quad (2r+t)x+y=2r \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　2 直線 AA' と BB' の交点が $M(x_0,\ y_0)$ より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r \cdots\cdots\cdots ③,\quad (2r+t)x_0+y_0=2r \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4)　まず，辺 AB の中点を C とすると $C(1,\ r)$ となり，$AC=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$CO'=AC\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{AB}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r,\ 1)$ とすることができ，

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO'}=(1,\ r)+t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1)=(rt+1,\ r+t)$$

これより，$O'(rt+1,\ r+t)$ となり，直線 OO' の方程式は $y=\dfrac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって，(3)から，直線 OO' 上に 2 直線 AA' と BB' の交点 $M(x_0,\ y_0)$ が存在することになる。すなわち，3 直線 AA'，BB'，OO' は 1 点で交わる。

［解 説］

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

15　　　　［京都大・文］

$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1)$ より，

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}>2+(\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y>0$ $(x>1,\ y>1$ または $0<x<1,\ 0<y<1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1>2\log_x y+(\log_x 2)^2$，$(\log_x y-1)^2-(\log_x 2)^2>0$ より，

$$(\log_x y-1-\log_x 2)(\log_x y-1+\log_x 2)>0,\ \log_x\frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x}>0$$

(i-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y<0$ $(x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1<2\log_x y+(\log_x 2)^2$ より，$\log_x\dfrac{y}{2x}\cdot\log_x\dfrac{2y}{x}<0$

(ii-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

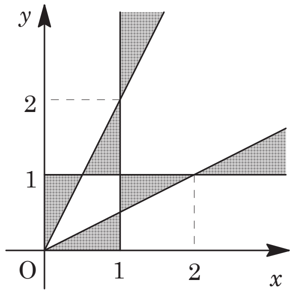
(ii-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，

$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。
ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

16　　　　［一橋大］

(1)　不等式 $-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ ……①に対して，

(i)　$x=y=0$ のとき　①は $-2 \leqq 0 \leqq 1$ となり，任意 θ に対して成立する。

(ii)　$x \neq 0$ または $y \neq 0$ のとき

φ を $\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ と決めると，①より，

$$-2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \leqq y+1$$

任意の θ に対して成立する条件は，

$$-2 \leqq -\sqrt{x^2+y^2} \text{ ………②},\quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq y+1 \text{ ………③}$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$，$x^2+y^2 \leqq 4$ ………④

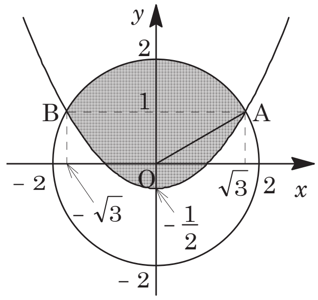
③より，$y+1 \geqq 0$ のもとで，$x^2+y^2 \leqq (y+1)^2$

$$x^2 \leqq 2y+1,\quad y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \text{ ………⑤}$$

さて，領域④と⑤の境界線の 2 つの交点 A, B は，

$$(2y+1)+y^2=4,\quad (y-1)(y+3)=0$$

$y \geqq -\dfrac{1}{2}$ から $y=1$ となり，$x=\pm\sqrt{3}$ である。



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 OA の方程式が $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で，OA と y 軸のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ より，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(2)　不等式 $-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ ……⑥に対し，独立に値をとる任意の α，β では，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin\beta \leqq 1$ なので，⑥より，

(i)　$y \geqq 0$ のとき

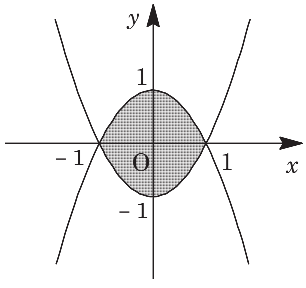
$$-1 \leqq -x^2-y \text{ ………⑦},\quad x^2+y \leqq 1 \text{ ………⑧}$$

⑦⑧より，$y \leqq -x^2+1$

(ii)　$y<0$ のとき

$$-1 \leqq -x^2+y \text{ ………⑨},\quad x^2-y \leqq 1 \text{ ………⑩}$$

⑨⑩より，$y \geqq x^2-1$



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S=2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx=-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{3}(1+1)^3=\frac{8}{3}$$

［解 説］

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとき，点 C$(x,\ y)$ の存在範囲は，$y>0$ において，

(i)　AC＝BC のとき

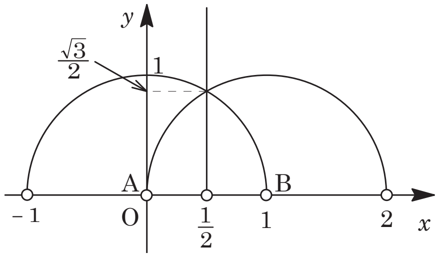
点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x=\dfrac{1}{2}$ 上にある。

(ii)　AB＝AC のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

(iii)　BC＝BA のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より，点 C は右上図の円または直線上にある。

(2)　△ABC が鋭角三角形である条件は，

$$\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \angle\mathrm{BCA}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

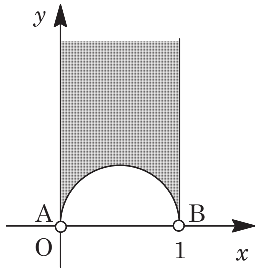
$y>0$ において，①②③がすべて成立する点 C$(x,\ y)$ の存在範囲を求める。

①より，点 C は y 軸の右側，すなわち領域 $x>0$ にある。

②より，点 C は直線 $x=1$ の左側，すなわち領域 $x<1$ にある。

③より，点 C は AB を直径とする円の外部，すなわち領域 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$ にある。

①②③より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，境界は領域に含まない。



(3)　まず，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ より，点 C は(2)の領域内に存在する。

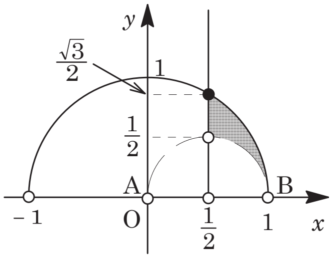
ここで，条件から，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ なので，三角形の角と辺の大小関係を用いると，

$$\mathrm{BC}\leqq\mathrm{AC}\leqq\mathrm{AB}$$

すると，BC≦AC から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ にある。

また，AC≦AB から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x^2+y^2\leqq 1$ にある。

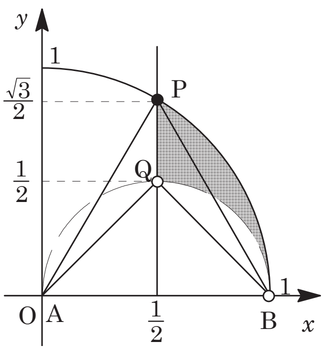
以上より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，破線の境界は領域に含まない。



(4)　まず，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\ \ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，△ABP は正三角形となるので，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{3}$ である。

　また，AB を直径とする円周上に点 Q をとると，$\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

　すると，点 C が右図の網点部に存在するとき，線分 AB を弦とする円弧を考え，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}$ のとりうる値を求めると，右図より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ である。



［解 説］

　巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく，図形的に解くと，スッキリした解になります。