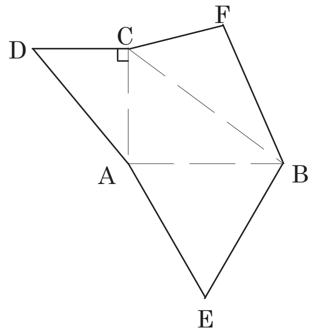
$\boxed{8}$　［京都大・文］

平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBEの面積比が $2:3$ のとき，$\sin\angle AOB$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$　　　　［北海道大］

図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，$\angle ACD=90°$ で，$\triangle ABE$ は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。

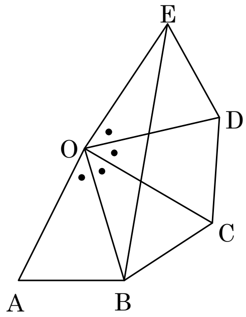


8　　　　［京都大・文］

$\angle \mathrm{AOB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$

また，題意より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{OE}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OD}$

(i)　$0<3\theta\leqq\pi\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle \mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin 3\theta=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle \mathrm{OAB}:\triangle \mathrm{OBE}=2:3$より，

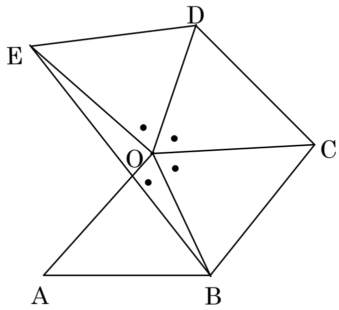
$\sin\theta:\sin 3\theta=2:3$，$2\sin 3\theta-3\sin\theta=0$

$2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-3\sin\theta=0$

$8\sin^3\theta-3\sin\theta=0$

$0<\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(ii)　$\pi<3\theta\left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle \mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin(2\pi-3\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle \mathrm{OAB}:\triangle \mathrm{OBE}=2:3$より，

$\sin\theta:(-\sin 3\theta)=2:3$

$2\sin 3\theta+3\sin\theta=0$，$8\sin^3\theta-9\sin\theta=0$

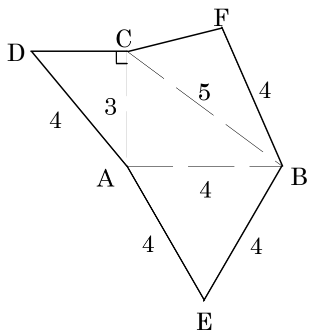
すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$より，適する$\sin\theta$の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle \mathrm{AOB}=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

［解 説］

図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

$\boxed{9}$ ［北海道大］



右図において，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$ より，

$$\angle BAC = 90^\circ$$

また，$\angle ACD = 90^\circ$ より，

$$CD = CF = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$$

さて，三角錐 V の底面△ABC を xy 平面上にとり，$A(0,\ 0,\ 0)$，$B(4,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 3,\ 0)$ とする。さらに，V のもう 1 つの頂点を $P(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とおく。

すると，$PA=PB=4$，$PC=\sqrt{7}$ から，

$$x^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\text{①},\ (x-4)^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\text{②}$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7 \cdots\cdots\text{③}$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2 \cdots\cdots$④

②③より，$-4x+3y=1$ となり，④を代入すると，$y=3 \cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入すると，$z^2=3$ となり，$z>0$ から $z=\sqrt{3}$ である。

以上より，三角錐 V の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

［解 説］

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。