14　　［千葉大・理］

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。

15　［京都大・理］

n 枚のカードを積んだ山があり，各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では，一番上のカードを取り，山の一番上にもどすか，あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき，最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

　さいころを投げると, 1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1)　$p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

17　　［九州大・理］

k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚, …,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M, 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ。

(2)　p_{n+1} を p_n , M, N で表せ。

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4)　p_n を n と k で表せ。

18　　[神戸大・理]

大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて，大きいサイコロの出た目の数 A，および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える。ただし，このゲームには 6 種類の得点 X_n $(1 \leqq n \leqq 6)$ があって，それぞれ，次の規則で定められているとする。

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n \text{のとき}) \\ B & (A < n \text{かつ} A \neq B \text{のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{かつ} A = B \text{のとき}) \end{cases}$$

ここで，a，b は実数の定数である。また，得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A，B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ。

(2)　$E_4 - E_3$ を求めよ。

(3)　$E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a，b はあるか。あれば求めよ。なければ，そのことを示せ。

$\boxed{14}$　［千葉大・理］

(1)　まず，9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す ${}_9C_4$ 通りが同様に確からしいとし，事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて, X が 5 の倍数になる事象を A とすると，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_8C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{9}$ から,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　X が 3 の倍数になる事象を B, 4 の倍数になる事象を C とすると，X が 12 の倍数になる事象は $B\cap C$ となり，まず $P(\overline{B})=\dfrac{{}_6C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{42}$ である。

また, X が 4 の倍数にならないのは，奇数のカード 4 枚を取り出す場合か, 2 または 6 のカードと奇数のカード 3 枚を取り出す場合のいずれかより,

$$P(\overline{C})=\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4}+\frac{{}_2C_1\times{}_5C_3}{{}_9C_4}=\frac{25}{126}$$

さらに, X が 3 の倍数にも 4 の倍数にもならないのは, 1, 2, 5, 7 のカードを取り出す場合のみより，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\dfrac{1}{{}_9C_4}=\dfrac{1}{126}$ となり,

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=1-\frac{5}{42}-\frac{25}{126}+\frac{1}{126}=\frac{29}{42}$$

(3)　5 と 7 については，平方数 X の約数となる可能性がないので，それ以外の数について，次のようにカードの数の集合を設定する。

$$S=\{1,\ 4,\ 9\},\ T=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$$

まず，集合 S から 3 枚，集合 T から 1 枚取り出す場合，集合 T のみから 4 枚取り出す場合は, X は平方数にはならない。そこで, X が平方数になるのは,

(i)　集合 S から 1 枚，集合 T から 3 枚取り出す場合
集合 T からは，(2, 3, 6)，(3, 6, 8) を取り出す 2 通りの場合がある。

(ii)　集合 S から 2 枚，集合 T から 2 枚取り出す場合
集合 T からは，(2, 8) を取り出す 1 通りのみである。

(i)(ii)より, X が平方数になる確率は,

$$\frac{{}_3C_1\times 2}{{}_9C_4}+\frac{{}_3C_2\times 1}{{}_9C_4}=\frac{1}{14}$$

［解 説］

確率の頻出問題です。(1)と(2)は文系に類題が出ています。(3)は，闇雲に列挙しようとすると，数えもれが発生しそうです。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にあるためには，$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくていはいけない。

(i)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし，n 回目の試行では，番号 n のカードを山の一番上にもどすことより，その確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが上から二番目にあるとき

$1\leqq k\leqq n-1$ として，k 回目の試行で，一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし，それ以外の試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より，n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は，

$$P=\frac{(n-1)!}{n^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\right\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{l=1}^{n-1}l\right\}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n}$$

［解 説］

題意を把握するために，$n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は，上の解からは省いていますが。

16　　［名古屋大・文］

(1)　さいころを 2 回投げるとき，出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると，右表のようになる。

2回＼1回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

これより，$p_2(0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$，$p_2(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$である。

(2)　さいころを$n+1$回投げるとき，出る目の積の一の位が 1 となるのは，次の 2 つの場合である。

(i)　n回までの積の一の位が 1 で，$n+1$回目が 1 のとき

(ii)　n回までの積の一の位が 7 で，$n+1$回目が 3 のとき

(i)(ii)より，$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$ ………①

(3)　$n+1$回投げるとき，出る目の積の一の位が 3 となるのは，n回までの積の一の位が 1 で$n+1$回目が 3, n回までの積の一の位が 3 で$n+1$回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

$n+1$回投げるとき，出る目の積の一の位が 7 となるのは，n回までの積の一の位が 7 で$n+1$回目が 1, n回までの積の一の位が 9 で$n+1$回目が 3 のときであり，

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots③$$

$n+1$回投げるとき，出る目の積の一の位が 9 となるのは，n回までの積の一の位が 3 で$n+1$回目が 3, n回までの積の一の位が 9 で$n+1$回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots④$$

①＋②＋③＋④より，

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}$$

ここで，$p_1(1)=p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(7)=p_1(9)=0$より，

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0+0\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解 説］

センター試験に向かうときと同様に，まず一覧表を作成した方がミスが少なくなります。なお, (3)は(2)と同様に考えた解法です。

17　　［九州大・理］

(1)　偶数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{M}{M+N}$，奇数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{N}{M+N}$ より，記録された 1 個の数が偶数となる確率 p_1 は,

$$p_1=\frac{M}{M+N}$$

また，記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，偶数＋偶数または奇数＋奇数より，その確率 p_2 は,

$$p_2=\left(\frac{M}{M+N}\right)^2+\left(\frac{N}{M+N}\right)^2=\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$$

(2)　記録された $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 個の数の和が偶数のとき $n+1$ 回目に偶数を取り出すか，n 個の数の和が奇数のとき $n+1$ 回目に奇数を取り出すかのいずれかより,

$$p_{n+1}=\frac{M}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}(1-p_n)=\frac{M-N}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(i)　k が偶数のとき　$M=2+4+\cdots+k=\dfrac{2+k}{2}\cdot\dfrac{k}{2}=\dfrac{2k+k^2}{4}$

$$N=1+3+\cdots+(k-1)=\frac{1+k-1}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(2k+k^2)-k^2}{(2k+k^2)+k^2}=\dfrac{1}{k+1}$

(ii)　k が奇数のとき　$M=2+4+\cdots+(k-1)=\dfrac{2+k-1}{2}\cdot\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{k^2-1}{4}$

$$N=1+3+\cdots+k=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{k^2+2k+1}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(k^2-1)-(k^2+2k+1)}{(k^2-1)+(k^2+2k+1)}=-\dfrac{1}{k}$

(4)　$(*)$より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{M-N}{M+N}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$と変形すると,

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^n$

(i)　k が偶数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n$

(ii)　k が奇数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n$

［解 説］

頻出の確率と漸化式の融合問題です。非常に細かい誘導がついています。

$\boxed{18}$ ［神戸大・理］

(1) 得点 X_3 の表は左側，X_4 の表は右側のようになる。

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2) X_3 の表と X_4 の表は，$A=3$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_4-E_3=\frac{1}{36}(1+2+3a+b+4+5+6)-\frac{1}{36}(3\times6)=\frac{3a+b}{36}\cdots\cdots\cdots①$$

(3) (2)と同様に，X_2 の表と X_3 の表は，$A=2$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_3-E_2=\frac{1}{36}(1+2a+b+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(2\times6)=\frac{2a+b+7}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

X_1 の表と X_2 の表は，$A=1$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_2-E_1=\frac{1}{36}(a+b+2+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(1\times6)=\frac{a+b+14}{36}\cdots\cdots\cdots③$$

また，X_4 の表と X_5 の表は，$A=4$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_5-E_4=\frac{1}{36}(1+2+3+4a+b+5+6)-\frac{1}{36}(4\times6)=\frac{4a+b-7}{36}\cdots\cdots\cdots④$$

X_5 の表と X_6 の表は，$A=5$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_6-E_5=\frac{1}{36}(1+2+3+4+5a+b+6)-\frac{1}{36}(5\times6)=\frac{5a+b-14}{36}\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，条件より，$E_1=E_2=E_3=E_4=E_5=E_6$ より，

$$E_2-E_1=0,\ E_3-E_2=0,\ E_4-E_3=0,\ E_5-E_4=0,\ E_6-E_5=0$$

①～⑤より，$3a+b=0\cdots\cdots⑥$，$2a+b+7=0\cdots\cdots⑦$

$a+b+14=0\cdots\cdots⑧$，$4a+b-7=0\cdots\cdots⑨$，$5a+b-14=0\cdots\cdots⑩$

⑥⑦より，$a=7$，$b=-21$ となり，この値は⑧⑨⑩をすべて満たす。

よって，$E_1=E_2=\cdots=E_6$ となる a, b は存在し，$a=7$，$b=-21$ である。

［解 説］

(3)での a, b の値は，E_4-E_3 と E_3-E_2 だけから求まります。その後，十分性を確認する方法もありますが，残りが 3 つの場合しかないので，これらを調べるという直接的な方法を採用しました。