19　　［京都大・文］

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

20　［一橋大］

2 以上の整数 m, n は $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$ を満たす。m, n を求めよ。

21　　　　［名古屋大・理］

x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。

22　　［千葉大］

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

23　　　　［東京大・文］

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

24　　［金沢大・文］

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right) \geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。

(i) $n \geqq 1$ のとき，$a_n > a_{n+1} > 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2} < \dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$ を示せ。

(iii) $n \geqq 1$ のとき，$0 < a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2} \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。

$\boxed{25}$　　［神戸大・理］

t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1=1,\ a_2=2t,\ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad(n\geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば，$0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば，$0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad(n\geqq 1)$$

となることを示せ。

$\boxed{19}$ ［京都大・文］

p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は,

$$(p^n)! = 1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times p^2\times\cdots\times p^3\times\cdots\cdots\times p^n$$

さて，1 から p^n までの整数で，$p^k\ (1 \leqq k \leqq n)$ の倍数は $\dfrac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$ 個ある。すなわち, p の倍数は p^{n-1} 個，p^2 の倍数は p^{n-2} 個，…，p^{n-1} の倍数は p 個，p^n の倍数は 1 個となる。

すると，$(p^n)!$ を素因数分解したとき, p の個数は,

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p-1}$$

したがって，$(p^n)!$ は p で $\dfrac{p^n - 1}{p-1}$ 回割り切れる。

［解 説］

$p = 3$，$n = 4$ の場合を具体的に考え，実験をしました。その結果を一般化したのが, 上の解です。

$\boxed{20}$ ［一橋大］

$m^3+1^3=n^3+10^3$ より，$m^3-n^3=999$ となり，

$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\times37\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, $m\geqq2$, $n\geqq2$ から，$m^2+mn+n^2>0$ となり, (＊)から $m-n\geqq1$ である。

さらに，$m^2+mn+n^2>m^2-2mn+n^2=(m-n)^2\geqq m-n$ から，

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$$

また，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2=3mn$ から，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2$ は 3 の倍数となるので,

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333),\ (9,\ 111)$$

(i)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333)$ のとき

この場合，$m-n=3$，$mn=\dfrac{1}{3}(333-3^2)=108$ となり，

$$(n+3)n=108,\ n^2+3n-108=0,\ (n-9)(n+12)=0$$

$n\geqq2$ から，$n=9$ となり，$m=9+3=12$

(ii)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(9,\ 111)$ のとき

この場合，$m-n=9$，$mn=\dfrac{1}{3}(111-9^2)=10$ となり，

$$(n+9)n=10,\ n^2+9n-10=0,\ (n-1)(n+10)=0$$

$n\geqq2$ から, 解なしとなる。

(i)(ii)より，$m=12$，$n=9$

［解　説］

不定方程式の基本問題です。数の特性を活かして，解の候補を絞り込むことがポイントです。

$\boxed{21}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり,

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),$$
$$(p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq 3$ を用いると,

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p \text{………②}$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。

すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は,

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

［解 説］

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については, 初めはグラフということも考えましたが, 煩雑になりそうなので止めました。そこで, まず似た式どうしの大小を比べ, この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。

22　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して,

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1}$$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n$$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3$$

［解　説］

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

$\boxed{23}$ ［東京大・文］

(1) $m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$において，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} $$

ここで，m が素数のとき，m は$k!\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$は，すべて$m$の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$の最大公約数d_mは，$d_m = m$である。

なお，$m=2$のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$となり，$d_m = m$を満たしている。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$がd_mで割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i)　$k=1$のとき

$k^1 - k = 0$は，明らかにd_mで割り切れる。

(ii)　$k=l$のとき

$l^m - l$がd_mで割り切れると仮定すると，

$$ \begin{aligned} (l+1)^m - (l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1} - 1)l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\,l \end{aligned} $$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$はd_mで割り切れるので，$(l+1)^m - (l+1)$はd_mで割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数kに対し，$k^m - k$がd_mで割り切れる。

［解　説］

1999 年に理系で出された二項係数の問題を思い出しました。この過去問に比べると，内容は基本的です。

24　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$x>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x^2}\right)\geqq 2\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt[3]{2^{-2}}=2^{\frac{1}{3}}$$

等号は $\frac{1}{2}x=\frac{1}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt[3]{2}$ のときに成立する。

(2)　(i)　まず，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ を数学的帰納法で証明する。

(a)　$n=1$ のとき　$a_1=2$ より成立する。

(b)　$n=k$ のとき　$a_k>2^{\frac{1}{3}}$ の成立を仮定すると，(1)より，

$$a_{k+1}=\frac{2}{3}\left(a_k+\frac{1}{{a_k}^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$$

等号成立は $a_k=\sqrt[3]{2}$ のときなので仮定に反し，よって $a_{k+1}>2^{\frac{1}{3}}$ となる。

(a)(b)より，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ である。

また，$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{{a_n}^3-2}{{a_n}^2}$ となり，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，

$$a_n-a_{n+1}>0,\quad a_n>a_{n+1}$$

以上より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ。

(ii)

$$\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\left(a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\right)=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)+\frac{2}{{a_n}^2}$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_{n-1}}^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{{a_{n-1}}^2-{a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2}$$

$n\geqq 2$ のとき，(i)より $a_{n-1}>a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，$\frac{4}{3}\cdot\frac{{a_{n-1}}^2-{a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2}>0$ となり，

$$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$$

(iii) (i)より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ なので，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}=\frac{a_{n+1}{a_n}^2-2}{{a_n}^2}>0$

$n\geqq 1$ のとき，(ii)より，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(a_2-\frac{2}{{a_1}^2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　（等号は $n=1$ のとき）

さて，$a_2-\frac{2}{{a_1}^2}=\frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}=1$ となるので，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ から，

$$0<a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

量的にかなりのもので，この 1 題の中に 5 つの証明題が詰められています。

$\boxed{25}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　$t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$a_1 = 1$，$a_2 = 2t \geqq 2$ なので, $0 < a_1 < a_2$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < a_k < a_{k+1}$ の成立を仮定すると，条件より，

$$a_{k+2} - a_{k+1} = (2t-1)a_{k+1} - a_k \geqq a_{k+1} - a_k > 0$$

よって, $0 < a_{k+1} < a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し, $t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ が成り立つ。

(2)　$t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$|a_1| = 1$，$|a_2| = 2|t| \geqq 2$ なので, $0 < |a_1| < |a_2|$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < |a_k| < |a_{k+1}|$ の成立を仮定すると，条件より，

$$|a_{k+2}| = |2ta_{k+1} - a_k| \geqq |2ta_{k+1}| - |a_k| = 2|t||a_{k+1}| - |a_k|$$

すると，$|a_{k+2}| - |a_{k+1}| \geqq (2|t|-1)|a_{k+1}| - |a_k| \geqq |a_{k+1}| - |a_k| > 0$

よって, $0 < |a_{k+1}| < |a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3)　$-1 < t < 1$ のとき，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$a_1 = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$，$a_2 = 2t = 2\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ となり，成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$a_k = \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$，$a_{k+1} = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ であると仮定すると，条件より，

$$a_{k+2} = 2t\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin(k+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+2)\theta + \sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$-1 < t < 1$ $(t = \cos\theta)$ のとき，$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ が成り立つ。

［解　説］

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお, (1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが, 漸化式では, 1999 年に東大・理で利用して以来, 久々です。